Dynamische Optimierung in der wirtschaftswissenschaftlichen Anwendung

Benedikt Emanuel Maissenhälter
Birkenweg 31
D-74821 Mosbach
Deutschland

Bachelor-Arbeit

Universität St.Gallen
Prof. Dr. Karl Frauendorfer

13. Juni 2005

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Dynamischen Optimierung in der wirtschaftswissenschaftlichen Anwendung. Dazu wird zunächst die Dynamische Optimierung in einem sehr allgemeinen Rahmen vorgestellt und ihre Grundideen und Konzepte kurz erläutert. Davon ausgehend motiviert die Arbeit die Wahl der Optimalen Kontrolltheorie als Hauptanalyseinstrument und stellt diese ausführlich in einem ökonomischen Rahmen dar, d.h. es werden Annahmen getroffen, die eine bessere Anwendbarkeit der Optimalen Kontrolltheorie für wirtschaftswissenschaftliche Problemstellungen gewährleisten.
Das Maximum-Prinzip ist die zentrale Methode zur Lösung solcher Problemstellungen im Rahmen der Optimalen Kontrolltheorie und erfährt deshalb eine detaillierte Herleitung und Interpretation in Kapitel 3. Die erarbeiteten Konzepte werden schliesslich auf ein Fallbeispiel angewandt. Es handelt sich dabei um eine wichtige wirtschaftswissenschaftliche Problemstellung – die Frage der optimalen Investitionsplanung einer Unternehmung.

1.2 Wesen der Dynamischen Optimierung

Bei der Dynamischen Optimierung steht die Zeit im Vordergrund. Es geht um Probleme, die sich über mehrere Perioden erstrecken, also dynamisch sind. Die Dynamische Optimierung versucht die Frage zu beantworten, wie eine optimale Lösung an jedem Zeitpunkt der betrachteten Periode aussieht. Abb. 1 zeigt verschiedene Zeitpfade – das sind Kurven, die zu jedem Zeitpunkt einen Wert für die untersuchte Zustandsvariable ausgeben.
Aufgabe der Dynamischen Optimierung ist es aus der Menge der möglichen Zeitpfade den Optimalen zu bestimmen. Doch was bedeutet optimal in diesem Zusammenhang? Ein optimaler Zeitpfad ist derjenige Zeitpfad, der innerhalb der gegebenen Periode und unter Berücksichtigung eventuell bestehender Restriktionen den maximalen Wert[1] für den Optimierer hat. Das kann beispielsweise der Nutzen eines Individuums, der Gewinn eines Unternehmens, oder das Volkseinkommen eines Staates sein.

Es gibt drei verschiedene Methoden der Dynamischen Optimierung. Sie werden in den Kapiteln 1.4 - 1.6 vorgestellt.

[1] Bzw. bei Minimierungsproblemen der minimale Wert, z.B. minimale Kosten

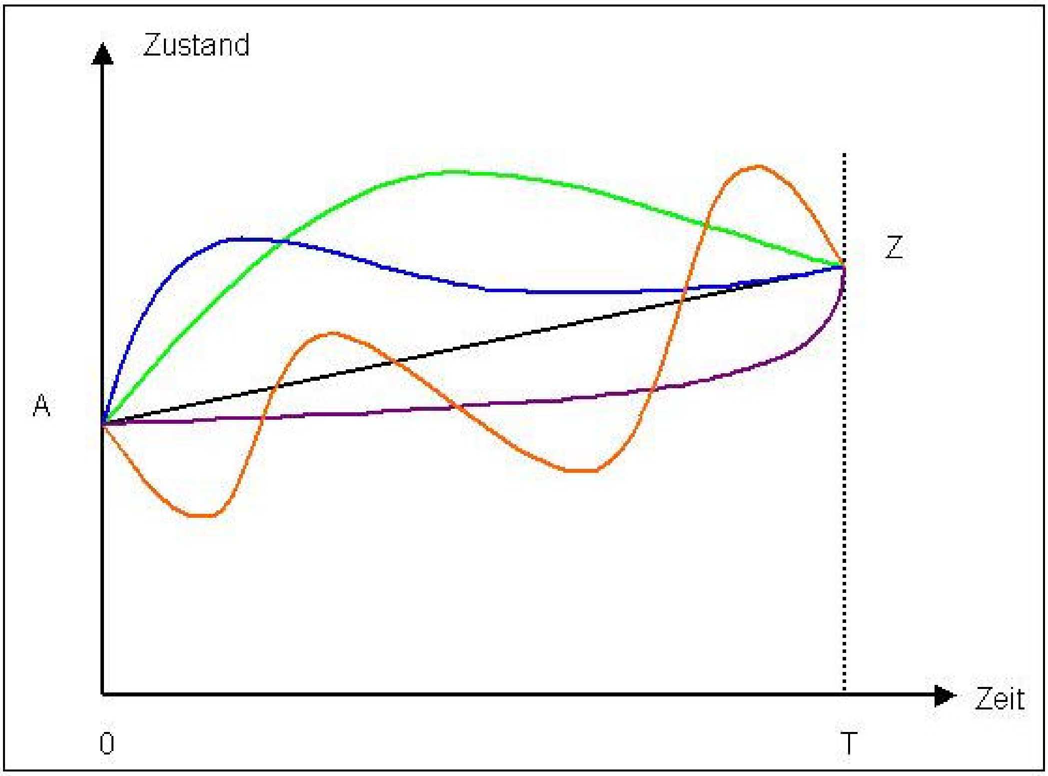

Abb. 1, Wesen der Dynamischen Optimierung[2]

1.3 Dynamische Optimierung vs. Statische Optimierung

In der ökonomischen Optimierung geht es allgemein um die bestmögliche Verteilung knapper Ressourcen. Wie wir soeben gesehen haben, geschieht dies bei der Dynamischen Optimierung über die Zeit. Die Statische Optimierung, hingegen, weist die Ressourcen nur zu einem Zeitpunkt zu.[3] Dies stellt natürlich eine erhebliche Vereinfachung des Problems dar. Der Vorteil liegt dann auch in einer leichteren Berechnung der Lösung. Allerdings geht dabei ein wesentlicher Teil der eigentlich verfügbaren Information verloren. In vielen Problemen interessiert uns nicht nur der Zustand am Ende einer Betrachtungsperiode, wie ihn die Statische Optimierung liefert, sondern gerade auch der Weg dorthin. Ja, er ist in vielen Fällen sogar nötig, um den gewünschten Endzustand überhaupt erreichen zu können.
Davon einmal abgesehen, stellt die Dynamische Optimierung auch eine bessere Abbildung der Realität dar. Unsere Welt befindet sich schliesslich in einem dynamischen Ablauf,

[2] Alpha C. Chiang, *Elements of Dynamic Optimization* (Long Grove, IL: Waveland Press, 2000), S.5.

[3] Für Details siehe: Michael D. Intriligator, *Mathematical Optimization and Economic Theory* (Englewood Cliffs, USA: Prentice-Hall, 1971), S.292.

Grössen verändern sich mit der Zeit. Man kann also sagen:[4]

> *Dynamic Models ... provide the theoretically most satisfactory environment for modeling the economics of income determination, employment, and inflation.*

Nichtsdestotrotz bleiben Statische und Dynamische Optimierung eng miteinander verbunden. Die Dynamische Optimierung ist in gewissem Sinn eine Verallgemeinerung der Statischen Optimierung. Wie wir später sehen werden sind viele Konzepte beider Optimierungsarten ein Analogon zueinander – unter Berücksichtigung der Hinzuziehung einer Zeitkomponente.

1.4 Variationsrechnung

Das erste Verfahren zur dynamischen Optimierung war die Variationsrechnung (engl. Calculus of Variations). Ihre Wurzeln[5] reichen bis auf die alten Griechen zurück. 1662 formulierte Fermat ein Minimalzeitproblem, das ähnliche Form aufweist. Ausserdem zu nennen sind wichtige Beiträge von Newton (1685) und Bernoulli (1696/1697). Eine entscheidende Weiterentwicklung vollbrachte Euler (1744) mit seiner Euler-Gleichung, die unten näher beschrieben wird. Die erste wirtschaftswissenschaftliche Verwendung gab es durch Evans (1924), es sind aber vor allem die berühmten Arbeiten von Ramsey (1928) zu Wirtschaftswachstum, und von Hotelling (1931) zu optimaler Ressourcenextraktion, die die Variationsrechnung in der Ökonomik etablierten.
Ein Problem der Variationsrechnung sieht typischerweise folgendermassen aus[6]

---

[4] David Cass and Karl Shell, Eds., *The Hamiltonian Approach to Dynamic Economics* (New York: Academic Press, 1976), S.1.
Ähnlich äussert sich: David Kendrik, *Control Theory with Applications to Economics*, in Kenneth J. Arrow and Michael D. Intriligator, Eds., Handbook of Mathematical Economics, Volume I, Chapter 4, S.111-158 (New York: North-Holland Publishing: 1981), S.111.

[5] Für Details siehe: Gustav Feichtinger & Richard F. Hartl, *Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse: Anwendungen des Maximumprinzips in den Wirtschaftswissenschaften* (Berlin: Walter de Gruyter Verlag, 1986), S. 11.

[6] Für die folgenden Ausführungen siehe: Chiang, S. 27-34 .

$$\text{Maximize} \quad V(y) = \int_0^T F\left(y(t),\ y'(t),\ t\right) dt$$

$$\text{s.t.} \quad y(0) = A$$
$$y(T) = Z \qquad (1.1)$$

Die grundlegende Idee der Variationsrechnung besteht darin, eine bestehende Kurve $y^*(t)$ zu variieren, indem man sie mit einer Hilfsfunktion kombiniert

$$y(t) = y^*(t) + \varepsilon\, a(t) \qquad (1.2)$$

ε ist dabei eine sehr kleine Zahl. Durch Variation von ε, und Wiederholen dieses Verfahrens kann man die benachbarten Kurven erzeugen, solange bis man die optimale Kurve gefunden hat. Untenstehende Abb. 2 verdeutlicht dies.

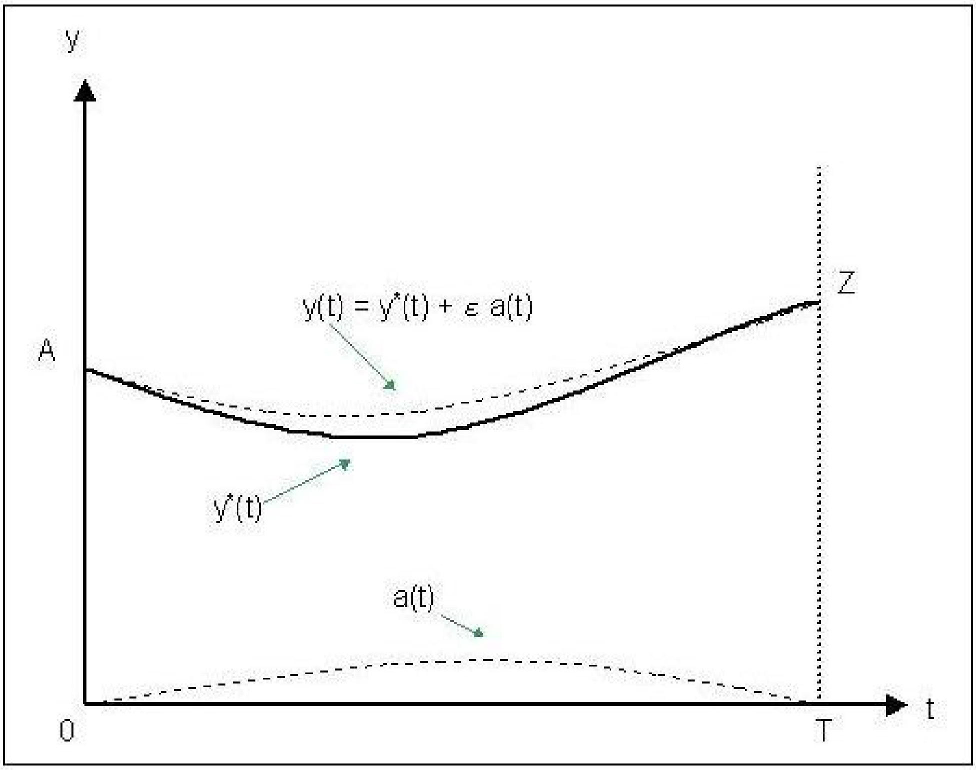

Abb. 2, Grundidee der Variationsrechnung[7]

In der praktischen Anwendung verwendet man zur Lösung allerdings die Euler-Gleichung, die aus (1.2) in Verbindung mit (1.1) hergeleitet werden kann. Sie lautet

$$\frac{dF_{y'}}{dt} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial t} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}\frac{dy'}{dt} \qquad (1.3)$$

bzw. in einer expliziten Form

[7] Chiang, S. 28.

$$F_{y'y'}\,y''(t) + F_{yy'}\,y'(t) + F_{ty'} - F_y = 0\,;\ \forall\, t \in [0,\ T] \tag{1.4}$$

Es handelt sich hierbei um eine nicht-lineare Differentialgleichung zweiten Grades, deren Lösung[8] das Optimierungsproblem (1.1) löst.
Die Variationsrechnung ist ein Spezialfall ihrer Weiterentwicklung, der Optimalen Kontrolltheorie, die in der Lage ist eine breitere Spanne von Problemen zu lösen[9], doch dazu später mehr.

1.5 Optimale Kontrolltheorie

Die Optimale Kontrolltheorie (OKT), engl. Optimal Control Theory, ist eine Weiterentwicklung der Variationsrechnung, die in den 1950ern entwickelt wurde. Als massgebliche Einflüsse sind Hestenes und Pontrjagin zu nennen. Die OKT erlaubt es eine breitere Klasse von Problemen zu lösen, da sie Restriktionen und Nebenbedingungen leicht verarbeiten kann. Wie der Name bereits andeutet, hebt die OKT explizit hervor, dass der Optimierer Einfluss auf Steuerungsgrössen des Problems nehmen kann, sie sozusagen kontrollieren kann[10]. So kann ein Individuum seinen Konsum und seine Sparquote steuern, oder ein Unternehmen seine Investitionen etc.
Folglich wird in der OKT unterschieden zwischen Zustandsvariablen und Kontrollvariablen. Letztere nehmen Einfluss auf die Zustandsvariablen. Beispielsweise nimmt die Kontrollvariable Investition Einfluss auf die Zustandsvariable Kapital und beide gemeinsam bestimmen dann den Wert der Zielfunktion, im gewählten Beispiel wäre das der Profit. Ein Problem der OKT lautet in allgemeiner Form[11]

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize} \int_0^T f(x(t),\ u(t),\ t)\,dt \\
&\text{s.t.} \quad \dot{x}(t) = g(x(t),\ u(t),\ t) \\
&\qquad\quad x(0) = x_0 \\
&\qquad\quad x(T) = x_T \\
&\qquad\quad u(t) \in U \quad \forall\, t \in [0,\ T]
\end{aligned} \tag{1.5}$$

[8] Für die Lösung werden die Randwertbedingungen aus (1.1) zu Hilfe genommen.

[9] Daniel Leonard & Ngo van Long, *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics* (Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1992), S. 171.

[10] In der Literatur herrschen die Bezeichnungen Kontrolle bzw. kontrollieren vor, während Feichtinger und Hartl (S. V), betonen, dass im deutschen der Begriff ‚Steuerung' bzw. ‚steuern' eigentlich eine treffendere Bezeichnung wäre.

[11] (1.5) stellt ein stetiges OKT-Problem dar. Stattdessen kann man auch eine diskrete Version wählen.

x(t) ist dabei die Zustandsvariable; u(t) die Kontrollvariable, die der Restriktion U folgt; die Funktion g stellt den funktionalen Zusammenhang zwischen der Kontroll- und der Zustandsvariable her, indem sie die erste Ableitung der Zustandsvariablen, also ihre Änderungsrate, beeinflusst. Die Zielfunktion wird mit f bezeichnet. Sie über die gegebene Periode, von 0 bis T, zu maximieren stellt unser Optimierungsproblem dar.
Die OKT steht im Mittelpunkt dieser Arbeit und wird daher im weiteren Verlauf noch ausführlich beschrieben.

1.6 Dynamische Programmierung

Life can only be understood
going backwards, but it must
be lived going forwards
Kierkegaard

Die Entwicklung der Dynamischen Programmierung (DP), engl. Dynamic Programming, wird gemeinhin Richard Bellman zugeschrieben. Tatsächlich gab es die Technik schon vor Bellman, aber er war es, der ihr ihren Namen gab[12] und ihr zu ihrem Durchbruch verhalf, indem er zeigte, dass sie – auch mit Hilfe der neu entstehenden Computertechnik – auf eine Vielzahl verschiedener Probleme anwendbar ist. [13]
Bei der DP geht es darum ein mehrstufiges Entscheidungsproblem zu lösen, indem man eine rekursive Induktion durchführt. Der Kern der DP besteht im Principle of Optimality. Dieses lautet in Bellmans eigenen Worten:[14]

> *An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision.*

---

[12] Zur Entstehung des Begriffs Dynamische Optimierung gibt es eine amüsante Anekdote. Offensichtlich war Bellmans Vorgesetzter bei der RAND Corporation wenig begeistert von Mathematik, so dass Bellman sich einen Namen ausdenken musste, der keinen ‚Verdacht' erregte. Siehe zur Entstehung: Stuart Dreyfus, „Richard Bellman on the Birth of Dynamic Programming," *Operations Research* 50. No .1 (2002), S. 48-51.

[13] Dimitri P. Bertsekas, *Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models* (Englewood Cliffs, USA: Prentice Hall, 1987), S. 46.

[14] Richard Bellman, *Dynamic Programming* (Princeton: Princeton University Press, 1957), S.83.

In einfachen Worten ausgedrückt bedeutet dies, dass die optimale Lösung auch für jedes Teilproblem der optimalen Lösung optimal ist, d.h. wenn man nur das Teilproblem lösen würde, erhielte man eine Lösung, die dem korrespondierenden Teil der Lösung des Gesamtproblems entspricht. Dies ist intuitiv richtig, da man sonst die optimale Lösung abändern könnte und dadurch eine noch bessere Lösung erhalten würde. Ein mathematischer Beweis dieses Prinzips ist in Anhang 1 aufgeführt.

Wir betrachten ein Dynamisches Optimierungsproblem der Form (1.5). In der Dynamischen Programmierung wird zur Lösung die Maximalwertfunktion explizit verwendet. Das ist die Funktion V(x(t)), die zu jedem x(t) den jeweiligen optimierten[15] Gesamtwert angibt

$$V(x(t)) \equiv \text{Maximize} \int_0^T f(x(t), u(t), t)\, dt \tag{1.6}$$

Bellmans Gleichung lautet dann[16]

$$\text{Maximize} \left[f(x(t), u(t), t) + \frac{\partial V(x(t))}{\partial x(t)}\, g(x(t), u(t), t) + \frac{\partial V(x(t))}{\partial t} \right] \tag{1.7}$$

Man löst nun (1.7) für zunächst für x(T), benutzt dieses dann, um mithilfe einer rekursiven Induktion die komplette Lösung zu berechnen. Das Verfahren soll an dieser Stelle aber nicht ausführlich dargestellt werden.

1.7 Gegenüberstellung von Variationsrechnung, Optimaler Kontrolltheorie und Dynamischer Programmierung

Nach den vorangegangenen kurzen Einführungen in die drei Methoden der Dynamischen Optimierung, gibt untenstehende Abb. 3 einen stichpunktartigen Überblick über die Vor- und Nachteile der beschriebenen Methoden. Diese Übersicht kann an dieser Stelle nicht erschöpfend sein, sondern ist dazu gedacht, einen ungefähren Eindruck davon zu erhalten, für welche Art von Problemen und für welche Fragestellung man am Besten welche Methode zur Bearbeitung wählt.

---

[15] Optimiert nach u(t)

[16] Diese Form der Bellman-Gleichung entspricht der stetigen Problemstellung aus (1.5). Sie ist wesentlich schwieriger zu lösen als eine diskrete Version, die man in der praktischen Anwendung eher benutzen würde. Es wurde hier diese Form angegeben, um die Vergleichbarkeit mit der Darstellung der anderen Methoden zu gewährleisten.

Methode	Vorteile	Nachteile
Variations-rechnung	▪ Bei einfachen Problemen ist die Euler-Gleichung einfach zu lösen. Das Problem kann somit einfach gelöst werden.	▪ Die Variationsrechnung kann nicht direkt mit Restriktionen umgehen. ▪ Keine qualitativen Einsichten.[17]
Optimale Kontroll-theorie	▪ OKT ist allgemeiner als die Variationsrechnung. ▪ Kann Restriktionen ohne weiteres berücksichtigen, auch Ungleichheitsbedingungen und Beschränkungen des Definitionsbereichs.[18] ▪ Hat eine anschauliche ökonomische Interpretation, die qualitative Einsichten zulässt. ▪ Oft geringerer Rechen-aufwand als DP.[19]	▪ Problem oft nicht analytisch lösbar.[20] ▪ Es ist schwierig stochastische Variablen einzubauen.
Dynamische Programm-ierung	▪ Breitestes Anwendungsfeld, da auch komplexe Restriktionen möglich sind. ▪ Hervorragend geeignet für Probleme, die Unsicherheit beinhalten. [21]	▪ Keine qualitativen Einsichten[22] ▪ Oftmals weniger effizient als OKT, da eine grössere Zahl von Berechnungen durchgeführt werden muss[23].

Abb. 3, Vor- und Nachteile der drei Methoden der Dynamischen Optimierung, eigene Darstellung.

[17] Intriligator, S.344.

[18] Intriligator, S.344.

[19] Feichtinger und Hartl, S.3.

[20] Feichtinger und Hartl, S.19.

[21] Bertsekas, S.23.

[22] Leonard and Long, S. 181.

[23] Bertsekas, S.23.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit Dynamischer Optimierung in der wirtschaftswissenschaftlichen Sicht. Einen zentralen Aspekt dabei nimmt die ökonomische Interpretation der Ergebnisse ein. Wie wir gesehen haben ist dies ausschliesslich bei Verwendung von OKT gegeben.
Gegen die Variationsrechnung spricht zudem, dass sie Restriktionen nicht oder nur schwerlich erlaubt. Gerade in der Ökonomik haben wir es aber, aufgrund knapper Ressourcen, sehr häufig mit Restriktionen zu tun.
Darüber hinaus, würde eine ausführliche Behandlung von Unsicherheit in der Dynamischen Optimierung – eigentlich ein Punkt der klar für die Dynamische Programmierung sprechen würde – den Rahmen dieser Arbeit sprengen, so dass darauf verzichtet wird.
Aus diesen Gründen widmet sich diese Arbeit im Folgenden der Dynamischen Optimierung mittels Optimaler Kontrolltheorie.

Das folgende Kapitel stellt eine Reihe von Annahmen auf, die das Ziel haben die OKT in eine ökonomische Umgebung einzubetten. Dies hat dreierlei Gründe. Erstens, konzentrieren wir uns dadurch auf die für unsere Interessen wesentlichen Bereiche der OKT. Zweitens, wird somit die Analyse der OKT vereinfacht. Und drittens, ermöglicht dies automatisch eine aussagekräftige ökonomische Interpretation der Ergebnisse.

2 Optimale Kontrolltheorie in einem wirtschafts-wissenschaftlichen Umfeld

2.1 Die Rolle von Annahmen in der Ökonomik

Im Zentrum jeder wirtschaftswissenschaftlichen Analyse steht – mehr oder weniger sichtbar – der Mensch. Genauer gesagt menschliches Handeln und menschliche Interaktionen in Bereichen wie Kauf-, Investitions- oder Arbeitsentscheidungen. Eine Vielzahl von Grössen beeinflussen dabei die Menschen. Dazu kommt, dass sich jeder Mensch in seinen Denkstrukturen und Gefühlen von anderen unterscheidet. Ein Analyst, der ein ökonomisches Problem auf Basis menschlichen Verhaltens untersuchen soll, ist deshalb vor mehrere komplexe Probleme gestellt. Erstens, wie soll er jeden Gedankengang, jedes Gefühl eines Individuums erfassen können?
Zweitens, wie soll er entscheiden welche Gedanken und Gefühle die Entscheidung beeinflussen? Drittens, wie soll er dies bei sehr, sehr vielen Menschen, die dazu auch noch interagieren, können? Und schliesslich viertens, selbst wenn er die ersten drei Probleme bewältigt hätte, wäre seine Informationsmenge so gewaltig, dass kein Computer der Welt daraus eine schlüssige Lösung berechnen könnte[24].
Seit jeher benutzen Ökonomen deshalb vereinfachende Annahmen, die die Realität auf die wesentlichsten Informationen reduzieren und somit eine durchführbare Analyse von Problemen ermöglichen. Häufig verwendete Annahmen sind beispielsweise *Freier Wettbewerb* bei *Vollständiger Information*, *Rationale Erwartungen*, *Risikoaversion* oder *Arbitragefreiheit*.
Es ist wichtig zu verstehen, dass diese Informationsreduktion zum einen nötig ist, um überhaupt etwas analysieren zu können, und zum anderen trotzdem brauchbare Ergebnisse liefern kann. Es gibt eine recht schöne Analogie[25], die die ökonomische Modellbildung mittels Annahmen mit einer Landkarte vergleicht. Auch diese ist eine simplifizierte Abbildung der Realität, die die Informationen auf das Wesentliche reduziert, aber es gerade dadurch überhaupt erst möglich macht den gesuchten Ort in der Realität zu finden.
In diesem Sinne werden auch wir im folgenden Annahmen treffen, die das breite und komplexe Gebiet der OKT auf die für uns massgeblichen Bereiche reduzieren – die Realität also so abbilden, dass wir unseren Weg hindurch zu ökonomischer Erkenntnis finden.

[24] Mal ganz davon abgesehen, dass es wahrscheinlich ausgesprochen lange dauern würde die Daten zu sammeln.

[25] Manfred Gärtner, *Macroeconomics* (London: Pearson: 2003), S.20-21.

2.2 Modellformulierung in stetiger vs. diskreter Zeit

In Kapitel 1.5 wurde bereits kurz angedeutet, dass man ein OKT-Problem sowohl in einer stetigen als auch in einer diskreten Version darstellen kann. Es erscheint ratsam sich auf eine Version festzulegen, um künftig eine einheitliche Notation zu gewährleisten. Zudem ist die Lösungmethode unterschiedlich, da die stetige Version mit Differentialgleichungen operiert, während die diskrete Version Differenzengleichungen benutzt[26].

Ein Nachteil der diskreten Version ist in der willkürlichen Länge der Perioden zu sehen[27]. In der Literatur werden beide Versionen verwendet, ohne zu einem nennenswerten Schluss über Vor- und Nachteile zu kommen. Für die Modellbildung in dieser Arbeit ist dieser Aspekt eher nebensächlich. Es wird daher für den Rest dieser Arbeit einfach die stetige Version verwendet, hauptsächlich weil der Autor das Operieren mit Differentialgleichungen für die elegantere Methode hält.

2.3 Unendlicher Zeithorizont

2.3.1 Begründung für die Wahl eines unendlichen Zeithorizonts

Im Gegensatz zur Frage der stetigen vs. diskreten Zeitmodellierung im vorherigen Kapitel, sind sich eigentlich alle Ökonomen in der Literatur einig, dass ein unendlicher Zeithorizont[28] eine realistische Annahme ist, die in den Wirtschaftswissenschaften sozusagen „automatisch auftritt, weil eine Beschränkung [des Zeithorizonts] künstlich wäre“[29]. Dies ist auch intuitiv einleuchtend. Man kann nicht wissen wie lange ein Individuum lebt oder ein Unternehmen besteht. Es ist zwar sicherlich richtig einzuwenden, dass man immerhin mit Sicherheit sagen könne, sie lebten nicht unendlich lange, doch löst dies das Dilemma nicht. Der Optimierer hat normalerweise keine Möglichkeit den genauen Endzeitpunkt zu bestimmen. Stattdessen

---

[26] Trotzdem sind sich die Lösungsarten ähnlich, was nicht zuletzt daran liegt, dass Differentialgleichungen gleich Differenzengleichungen mit infinitesimalen Zeitabständen sind.

[27] Martin L. Weitzman, *Income, Wealth, and the Maximum Principle* (Cambridge, MA: Harvard University Press, 2003), S.15.

[28] D.h.: $T = \infty$ in unserer Modellformulierung, siehe (1.5).

[29] D.A. Carlson, A.B. Haurie and A. Leizarowitz, *Infinite Horizon Optimal Control. Deterministic and Stochastic Systems*, 2nd ed. (Berlin: Springer, 1991), S.VII.

Im Gegensatz dazu sind in anderen Disziplinen die überwiegende Anzahl der Probleme mit endlichem Zeithorizont formuliert, so Weitzman, S.40.

kann er einen unendlichen Zeithorizont annehmen und so dieser Schwierigkeit entgehen[30]. Selbst wenn der Endzeitpunkt, T, bekannt wäre, gäbe es ein weiteres Problem, welches für einen unendlichen Horizont spricht. Wie wir in der allgemeinen Problemformulierung (1.5) gesehen haben, gibt es u.a. eine Endpunktbedingung $x(T) = x_T$. Welches ist nun a priori der korrekte Wert von x_T? Falls wir den Wert nicht willkürlich festlegen wollen, müssen wir erst ein zweites Optimierungsproblem, von $t = T$ bis $t = \infty$ lösen, das diese Frage beantwortet. Nehmen wir stattdessen von Anfang an einen unendlichen Zeithorizont an, so wird die Endpunktbedingung $x(T) = x_T$ durch eine allgemeinere Bedingung ersetzt, die die angesprochenen Probleme nicht mit sich bringt[31]. Wir werden darauf in Kapitel 3 näher eingehen.

2.3.2 Schwierigkeiten bei unendlichem Zeithorizont

Es soll an dieser Stelle nicht vernachlässigt werden, dass die Wahl eines unendlichen Zeithorizonts neben den angesprochenen Vorteilen auch eine Schwierigkeit beinhaltet, die bei der Modellierung zu Vorsicht gebietet. Das Integral in (1.5) ist nun ein uneigentliches Integral und es besteht deshalb die Möglichkeit, dass es nicht konvergiert[32]. Glücklicherweise kann unter Vorhandensein zweier Bedingungen die Konvergenz garantiert werden[33]. Im allgemeinen Problem von (1.5) sind zwei Modifikationen nötig:

1. Wir nehmen an, unsere Zielfunktion ist in folgender Form darstellbar

$$f\,(x(t), u(t), t) \equiv h\,(x(t), u(t), t) * e^{-rt} \qquad (2.1)$$

2. h (x(t), u(t), t) ist beschränkt, d.h. es gibt eine finite Zahl k, mit

$$k \geq h\,(x(t), u(t), t)\ ; \quad \forall\ x(t), u(t), t. \qquad (2.2)$$

Die erste Annahme wird im folgenden Kapitel aus anderen Gründen sowieso getroffen. Die zweite Bedingung kann ohne weiteres angenommen werden, da sie die Allgemeinheit unserer Aussagen nicht oder nur kaum einschränken wird. Ausserdem wäre ohne sie eine mögliche Lösung wenig aussagekräftig[34].

Satz: Unter den Voraussetzungen (2.1) und (2.2) konvergiert der Term

---

[30] Leonard and Long, S.285.

Ähnlich in: Brian Beavis and Ian M. Dobbs, *Optimization and Stability Theory for Economic Analysis* (Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1990), S.346.

[31] Weitzman, S. 39-40.

Ebenso in: Carlson, Haurie and Leizarowitz, S.6.

[32] Leonard and Long, S.285.

[33] Chiang, S.101.

[34] Wir wüssten nämlich nicht welcher Pfad optimal ist, wenn mehrere einen unendlichen Wert für das Gesamtproblem generieren, Chiang, S.285.

$$\int_0^\infty f(x(t),\ u(t),\ t)\ dt \ = \int_0^\infty h(x(t),\ u(t),\ t) * e^{-rt}\ dt \qquad (2.3)$$

Beweis: aus (2.2) folgt

$$\int_0^\infty h(x(t),\ u(t),\ t) * e^{-rt}\ dt \ \leq \int_0^\infty k * e^{-rt}\ dt \qquad (2.4)$$

Die rechte Seite kann wegen des konstanten, finiten k berechnet werden mit

$$\int_0^\infty k * e^{-rt}\ dt \ = \frac{k}{r} \qquad (2.5)$$

was ein finiter Wert ist. Somit ist auch die linke Seite von (2.4) endlich, d.h. das Integral (2.3) konvergiert[35]. □

2.4 Einbezug eines Diskontierungsfaktors

2.4.1 Begründung des Einbezugs eines Diskontierungsfaktors

In ökonomischen Problemen, die sich mit Kapital[36] und Kapitalströmen auseinandersetzen ist es üblich die Verzinsung auf das Kapital zu berücksichtigen. Insbesondere bei mehrperiodigen Fragestellungen werden in der Regel künftige Kapitalströme abdiskontiert. D.h man berechnet ihren Present Value, also ihren Barwert. Dieser Wert setzt einen künftigen Kapitalstrom in Relation zur Gegenwart, indem er die Frage beantwortet wie viel der künftige Wert heute wert ist.
Um den Sinn dieser Fragestellung zu verstehen muss man sich vor Augen führen, dass ein Franken heute mehr wert ist als morgen. Es gibt hierfür mehrere Gründe:

1. Einen Franken, den wir schon heute haben, können wir investieren. Das bringt uns Zinsen ein. In der nächsten Periode haben wir dann insgesamt (1+r) Franken, wobei $r > 0$ der relevante Zinssatz ist[37].
   Das Vorliegen eines positiven Zinssatzes $r > 0$ ist in der Produktivität der Wirtschaft zu sehen. Das Argument geht ungefähr wie folgt: Mit Geld kann man eine Maschine kaufen, diese produziert Wirtschaftsgüter, die man verkaufen kann. Falls man produktiv ist, macht man mittels dieses Vorgangs einen Gewinn. D.h. also durch den

---

[35] Chiang, S.101.

[36] Hier ist mit Kapital nicht unmittelbar physisches Kapital gemeint, sondern Geld im weitesten Sinne.

[37] Richard A. Brealey and Stewart C. Myers, *Capital Investment and Valuation* (New York: McGraw-Hill, 2003), S.16.

Konsumverzicht heute (Kauf der Maschine) haben wir höhere Konsummöglichkeiten morgen. Genau dieser positive Wertzuwachs entspricht der Verzinsung[38].

2. In fast allen Ländern gibt es Inflation. In Form von Preissteigerungen sinkt der Wert einer Einheit Geldes, weil durch die höheren Preise die Kaufkraft abnimmt[39].
3. Menschen sind in der Regel gegenwartsorientiert, sie sorgen sich mehr um das hier und jetzt als um die Zukunft. Folglich ist ihnen Konsum heute wichtiger als morgen. Man sagt sie haben eine Zeitpräferenz für die Gegenwart[40].

Um diese Konzepte in unserer Analyse berücksichtigen zu können, werden wir in unser Modell ebenfalls einen Diskontierungsfaktor einbeziehen.

2.4.2 Wahl des Diskontierungsfaktors

Die Bestimmung des Barwerts geschieht in der einfachsten Form mittels

$$\frac{1}{1+r} \tag{2.6}$$

Wenn man nun einen längeren Zeitraum von t Perioden betrachtet und eine stetige Verzinsung annimmt verändert sich (2.6) zu[41]

$$e^{-rt} \tag{2.7}$$

Stetige Verzinsung bedeutet dabei, dass an jedem infinitesimalen Zeitpunkt einer Periode eine Verzinsung vorgenommen wird. Obwohl dies zunächst unrealistisch erscheinen mag, ist es dennoch gängige Praxis in der Finanzbranche, weil man annimmt, eine gleichmässige Verteilung der Verzinsung über die gewählte Periode entspricht am ehesten einer fairen Betrachtung[42]. Im Übrigen muss selbst bei Wahl von (2.7) nicht unbedingt eine stetige Verzin-

---

[38] Thomas E. Copeland, J. Fred Weston and Kuldeep Shastri, *Financial Theory and Corporate Policy*, 4th ed. (New York: Pearson Addison Wesley: 2005), S.881.

Ebenso in: Leonard and Long, S.122.

[39] Man bedenke aber, dass es einige Ausnahmen hiervon gibt. Das prominenteste Beispiel ist Japan, das während der 1990er mit einer Deflation zu kämpfen hatte.

[40] Copeland, Weston and Shastri, S. 881.

Die Richtigkeit dieser Aussage ist allerdings in Zweifel zu ziehen. Die immer grösser werdende Bedeutung, die die Altersvorsorge heutzutage einnimmt ist ein klares Indiz, dass sich die Menschen sehr wohl um die Zukunft sorgen. Immerhin könnte man sagen, dass die Aussage stimmt, wenn man den Zeitraum nur gross genug wählt, weil die Gegenwart mit Sicherheit höher geschätzt wird als eine Zukunft, die so weit entfernt ist, dass man sie nicht mehr erleben wird.

[41] Siehe Anhang 2 für eine Herleitung der Formel.

[42] Brealey and Myers, S.42.

sung vorliegen. Mit Hilfe einer kleinen Transformation[43] kann man eine einmalige Verzinsung pro Periode mittels (2.7) darstellen: Sei i der Zinssatz, den man für die einmalige Verzinsung pro Periode benutzt. Mittels

$$r = \ln(1 + i) \tag{2.8}$$

und

$$e^{r} = 1 + i \tag{2.9}$$

erhalten wir schliesslich

$$e^{-rt} = (1 + i)^{-t} \tag{2.10}$$

Ein Diskontierungsfaktor der Form (2.7) bietet zudem einige Vorteile, die für uns massgeblich sind. Zum einen die allgemeinen Vorteile der Euler'schen Zahl wie leichte Differenzierbarkeit, zum anderen kann man zeigen, dass nur bei Wahl von (2.7) als Diskontierungsfaktor in einem OKT-Problem eine dynamische Inkonsistenz vermieden wird. Das bedeutet, dass bei Wahl einer anderen Form des Diskontierungsfaktors der Optimierer beständig seinen optimalen Pfad abändern will[44]. Aus diesen Gründen verwenden wir von nun an (2.7) als Diskontierungsfaktor in unserem Modell. Konkret werden wir unsere Zielfunktion in der Form (2.1) darstellen. h ist dabei der Gewinn, Nutzen, etc. pro Periode t, der auf heute abdiskontiert wird.

2.4.3 Bedeutung und Bestimmung von r

Im Diskontierungsfaktor (2.7) stellt r die relevante Diskontierungsrate dar. Ihre Bedeutung richtet sich dabei nach der jeweiligen Problemstellung. Wird Nutzen maximiert, kann man r als Rate der Zeitpräferenz oder als Wahrscheinlichkeit, dass die Welt vergeht, darstellen[45]. Wird Profit oder dergleichen maximiert, ist r die kompetitive Verzinsung, die in dem Unternehmensumfeld angemessen ist. Z.B. kann das Capital Asset Pricing Model (CAPM) dazu verwendet werden r unter Berücksichtigung des entsprechenden Risikos zu bestimmen[46]. Laut CAPM gilt[47]:

$$r = r_{RF} + \beta\,[\,r_M - r_{RF}] \tag{2.11}$$

---

[43] Siehe Leonard and Long, S.122.

[44] Siehe: Leonard and Long, S.150-151.

[45] Weitzman, S.34.

[46] Weitzman, S.34.

[47] r_{RF} bezeichnet dabei den risikolosen Zinssatz, r_M den Return auf das Marktportfolio, und β ist ein Mass für das Risiko, das das Investment mit sich bringt. Es gilt $\beta = COV(r, r_M) / Var(r_M)$.
Für eine ausführliche Darstellung des CAPM siehe: Copeland, Weston and Shastri, S.148-170.

2.5 Konkavität der funktionalen Formen

2.5.1 Abnehmende Grenzerträge in der Ökonomik

Die Wirtschaftswissenschaft wird manchmal auch als das „Studium der besten Nutzung knapper Ressourcen“ bezeichnet[48]. Rohstoffe, Maschinen, Zeit, Geld und Arbeitskräfte sind nur in beschränktem Umfang vorhanden. Eine Folge dieser Knappheit ist das Phänomen abnehmender Grenzerträge, welches in den meisten ökonomischen Sachverhalten auftritt bzw. angenommen wird. Überlegen wir uns folgendes Beispiel, um dies zu verdeutlichen: Angenommen wir besitzen eine kleine Firma, die ein Wirtschaftsgut herstellt. Die Anzahl Maschinen und unsere Räumlichkeiten sind kurzfristig fix vorgegeben, wir können allerdings Arbeiter einstellen, die das Gut herstellen. Mit mehr Arbeitern steigt auch die absolute Anzahl von produzierten Einheiten, allerdings, und das ist das entscheidende, werden die Zuwächse immer kleiner. Der Grund liegt in der Fixierung des Kapitals. Mit mehr und mehr Arbeitern kommt es zu längeren Wartezeiten bei den Maschinen, die Arbeiter behindern sich in den beengten Räumlichkeiten gegenseitig, u.s.w. Ein zusätzlicher Arbeiter bringt also weniger Zuwachs als sein Vorgänger. Abb. 4 veranschaulicht diesen Zusammenhang.

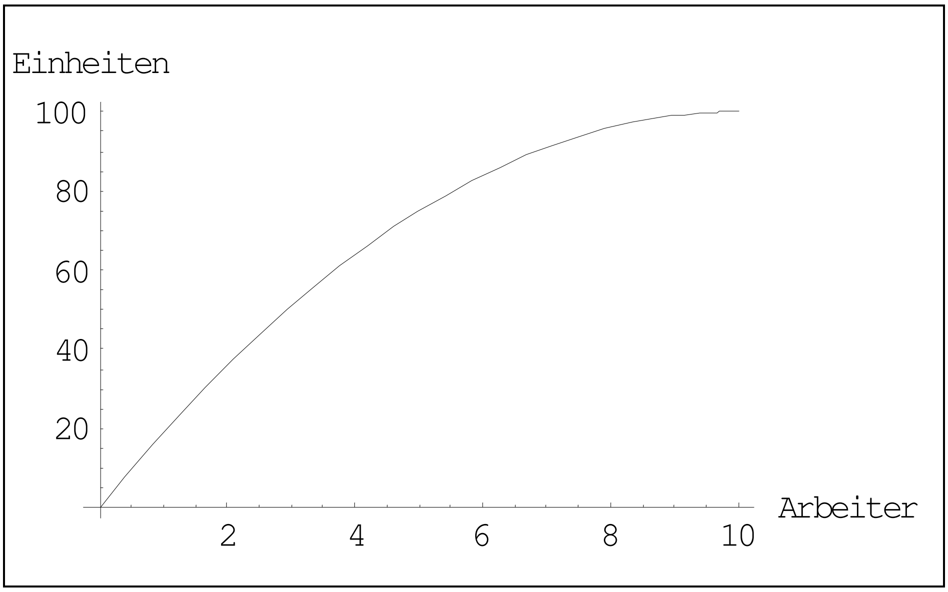

Abb. 4, Abnehmender Grenzertrag, eigene Darstellung

Auch in vielen anderen Beispielen zeigt sich, dass abnehmende Grenzerträge eine sehr sinnvolle Annahme ist, die die Realität sehr gut beschreibt. Mathematisch gesehen entsprechen abnehmende Grenzerträge der Konkavität der untersuchten Funktion.

---

[48] Avinash K. Dixit, *Optimization in Economic Theory*. 2nd ed. (New York: Oxford University Press, 1990), S.1.

2.5.2 Bestimmung der Konkavität

Es stellt sich nun zunächst die Frage wie man eine Funktion auf Konkavität überprüfen kann. Es gibt hierzu im Wesentlichen zwei Methoden.

Erstens, eine Funktion f ($\mathbf{x}$) ist dann konkav, wenn gilt[49]

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \geq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2)\ ; \ \forall \quad \lambda \in [0,1] \qquad (2.12)$$

Abb. 5 illustriert diesen Sachverhalt für den zweidimensionalen Fall

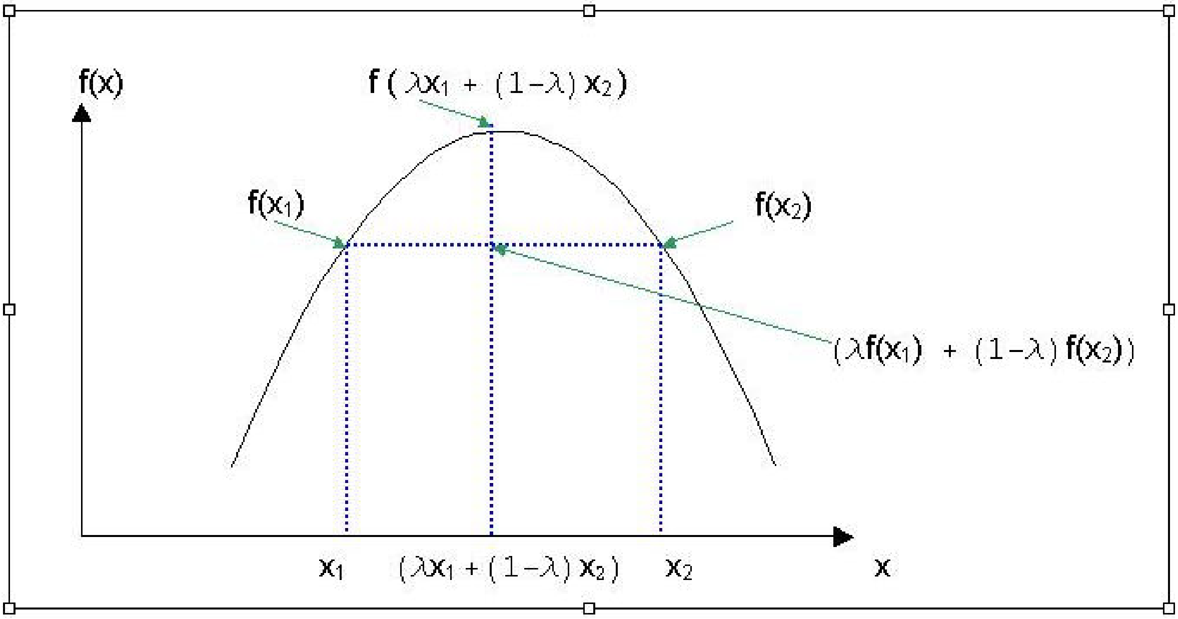

Abb. 5, Konkavität, eigene Darstellung

Diese Definition erweist sich in der praktischen Anwendung allerdings als unvorteilhaft. Ein zweites Kriterium, das wesentlich effizienter ist und auch insbesondere bei höheren Dimensionen noch einfach anzuwenden ist, besteht darin, die Hesse-Matrix M der partiellen zweiten Ableitungen von f ($\mathbf{x}$) zu bilden[50] und sie auf Definitheit zu überprüfen[51]. Das Problem besteht dann lediglich darin die Eigenwerte $\mu_1,\ldots,\mu_n$ von M zu bestimmen, was mit Hilfe eines Computers leicht bewerkstelligt werden kann. Es gilt[52]

---

[49] Es wird hierbei vorausgesetzt, dass f($\mathbf{x}$) über eine konvexe Menge definiert ist. Für Details zu konvexen Mengen siehe: Carl P. Simon and Lawrence Blume, *Mathematics for Economists* (New York: W.W. Norton, 1994) , S.506.

[50] Bei nur zwei Dimensionen vereinfacht sich dies zu $f''(x) \leq 0$.

[51] Wir nehmen an, dass f($\mathbf{x}$) C^2 ist. M ist dann quadratisch und wegen Youngs Theorem auch symmetrisch (vgl. Simon and Blume, S.330), somit liegt eine quadratische Form $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T M \mathbf{x}$ vor, die man auf Definitheit testen kann.

[52] Vgl. Heinz Müller, *Mathematische Grundlagen der Ökonomie*, Vorlesungsunterlagen WS 2003/2004 (St.Gallen, 2003), S.43.

$$f(\mathbf{x}) \text{ konkav } \Leftrightarrow \text{ M ist negativ semi-definit } \Leftrightarrow \mu_1,\ldots,\mu_n \leq 0 \qquad (2.13)$$

2.5.3 Konkavität in unserer Problemformulierung

Die Annahme der Konkavität der funktionalen Formen ist in der mathematischen Optimierung allgemein von Bedeutung – dies unterstreicht Anhang 3. Wie wir später sehen werden, ist sie auch in der Optimalen Kontrolltheorie sehr hilfreich, da dadurch die notwendigen Bedingungen einer optimalen Lösung auch hinreichend sind. Aus diesem Grund werden wir im Folgenden eine konkave Zielfunktion, f(x(t), u(t), t) annehmen[53]. Dies ergibt sich unmittelbar aus obigen Ausführungen.
Für die Funktion g(x(t), u(t), t) werden wir annehmen, sie sei entweder konkav oder linear[54]. Dies hängt von der jeweiligen Problemformulierung ab. Die angesprochenen Grenzerträge sind ein Grund warum g konkav sein könnte. Für die Linearität spricht die Überlegung, dass die Kontrollvariable die Zustandvariable immer in der gleichen Art und Weise beeinflusst, unabhängig von den relativen Grössenordnungen der Variablen. Wichtig ist hier nur, die Konvexität von g auszuschliessen, was eigentlich in allen ökonomischen Fragestellungen von vornherein gegeben ist.

2.6 Beschränkung auf Maximierungsprobleme

Um eine einheitliche und einfachere Notation zu gewährleisten, treffen wir die Konvention nur Maximierungsprobleme zu behandeln. Dies schränkt die Allgemeinheit der Aussagen allerdings nicht ein, da wir jedes Minimierungsproblem durch eine kleine Transformation als Maximierungsproblem ausdrücken können.
Es gilt

$$\min f(\mathbf{x}) = \max \; -f(\mathbf{x}) \qquad (2.14)$$

An dieser Stelle kann man auch sehr schön die Verbindung zum vorhergehenden Kapitel sehen. Bei Maximierungsproblemen nehmen wir an, dass f ($\mathbf{x}$) konkav ist, bei Minimierungsproblemen, dass f ($\mathbf{x}$) konvex ist. (2.14) macht umso mehr Sinn, wenn man sich den Zusammenhang zwischen Konkavität und Konvexität vor Augen führt

$$f \text{ ist konkav} \Leftrightarrow -f \text{ ist konvex} \qquad (2.15)$$

[53] Und zwar konkav in x und u.

[54] Ebenfalls in x und u.

2.7 Beschränkung auf autonome Probleme

Ein OKT-Problem ist autonom, wenn die Zeit t nicht direkt in den funktionalen Formen auftaucht, sondern nur indirekt über die Kontroll- und Zustandsvariablen. Der Diskontierungsfaktor, der ja t direkt enthält, wird dabei nicht beachtet[55]. Um ein einfaches Beispiel zu geben interessieren uns nicht Funktionen der Form:

$$h(x(t), u(t), t) = a*x(t) + b*u(t) + c*t \quad ; \quad a, b, c \in \mathbb{R} \qquad (2.16)$$

sondern

$$h(x(t), u(t)) = a*x(t) + b*u(t) \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R} \qquad (2.17)$$

Es ist übrigens gerade der Diskontierungsfaktor, der dafür sorgt, dass diese Beschränkung eigentlich keinen Verlust der Allgemeingültigkeit unserer Modellierung zu Folge hat. Der Einfluss der Zeit ist im Diskontierungsfaktor berücksichtigt. Von der Diskontierung abgesehen gibt es keinen allgemeinen Grund warum eine ökonomische Grösse, z.B. der Profit, explizit von der Zeit abhängen sollte. Warum also ceteris paribus der gleiche Profit zu einer anderen Zeit einen anderen Wert haben sollte. In anderen Disziplinen hängt, dagegen, die Mehrheit der Probleme direkt von t ab, sie sind also nicht-autonom.

Die Beschränkung auf autonome Probleme bringt zwei Erleichterungen mit sich. Erstens, ist somit eine stationäre Lösung des Problems möglich[56]. Zweitens, kann bei autonomen Problemen die Technik der Phasendiagramme für eine qualitative Lösung eingesetzt werden[57]

2.8 Das ökonomische Optimale Kontrolltheorie-Problem

Aus den vorangegangenen Überlegungen können wir nun das allgemeine OKT-Problem (1.5) aus Kapitel 1.5 umschreiben in eine ‚ökonomische' Form, die für unsere Zwecke besser geeignet ist. Wir erhalten[58]:

---

[55] Chiang, S.212.

Ebenso in Weitzman, S.39.

[56] Feichtinger und Hartl, S.39.

Zu stationären Lösungen später noch eine ausführlichere Darstellung.

[57] Dixit, S.157.

Zu Phasendiagrammen später ebenfalls mehr.

[58] Hinweis: In dieser Form gibt (2.18) ein Problem mit einer Zustands- und einer Kontrollvariablen an. Für eine mehrdimensionale Problemstellung sind x(t), u(t), und g(x(t), u(t)) Vektoren, sonst ändert sich nichts, insbesondere sind h(x(t), u(t)) und t weiterhin Skalare.

$$\text{Maximize} \int_0^{\infty} h(x(t), u(t)) * e^{-rt}\, dt$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad \dot{x}(t) &= g(x(t), u(t)) \\ u(t) &\in U \\ x(t) &\geq 0 \\ x(0) &= x_0 \\ \\ \forall t &\geq 0 \end{aligned} \qquad (2.18)$$

Um Exkurse für mathematische Sonderfälle zu vermeiden, und unsere weitere Analyse auf die Kernpunkte der ökonomische OKT-Probleme zu fokussieren, treffen wir einige wenige technische Annahmen[59]:

- Die Kontrollvariable u(t) sei stückweise-stetig[60] in t.
- Die Zustandsvariable x(t) sei C^1 in t.
- Die Funktionen h und g seien mindestens C^2 in x(t) und u(t), sowie C^1 in t.

Um Kapitel 2 kurz zusammenzufassen: Wir haben das allgemeine OKT-Problem in eine ökonomische Umgebung eingebettet, indem wir einige ökonomische Annahmen sowie technische Konventionen getroffen haben. D.h. wir betrachten im Folgenden Probleme, die

- einen Diskontierungsfaktor der Form e^{-rt} enthalten,
- stetig sind,
- einen unendlichen Zeithorizont umfassen,
- eine konkave Zielfunktion über einer konvexen Menge beinhalten,
- diese Zielfunktion maximieren wollen,
- einen funktionalen Zusammenhang g zwischen Kontroll- und Zustandsvariable haben, der entweder konkav oder linear ist,
- autonom sind,
- sowie obige technische Konventionen erfüllen.

Wie man ferner in (2.18) sehen kann gilt $x(t) \geq 0$. Unsere Zustandsvariable in einem ökonomischen Problem ist eigentlich immer eine Form von (physischem) Kapital im weitesten Sin-

[59] Siehe: Karl-Heinz Elster, *Modern Mathematical Methods of Optimization* (Berlin: Akademie Verlag, 1993), S.348.

[60] Also überall stetig, ausser an einer endlichen Anzahl von Punkten.

ne, also Maschinen, Arbeit, Boden etc. und kann deshalb nicht negativ sein. Die Kontrollvariable ist in aller Regel (Netto-)Investition im weitesten Sinne[61].

Aufbauend auf dieser ökonomischen Form eines OKT-Problems werden wir im Folgenden zeigen wie der zentrale Lösungsansatz für diese Probleme aussieht – das Maximum-Prinzip.

[61] Weitzman, S.39.

3 Das Maximum-Prinzip als zentrales Lösungskonzept

Das Maximum-Prinzip wurde parallel von Pontrjagin und Hestenes entwickelt. Es ist eine entscheidende Weiterentwicklung der Dynamischen Optimierung im Hinblick auf die ökonomische Interpretation. In einem sehr einflussreichen Artikel zeigt Dorfman wie man den Bedingungen des Maximum-Prinzips eine ökonomische Bedeutung entnehmen kann und wie die Optimale Kontrolltheorie dadurch zu einem essentiellen Werkzeug der Kapitaltheorie wird[62].

Dieses Kapitel stellt das Maximum-Prinzip dar, indem es zunächst einige dafür notwendige Hilfsmittel (die Hamiltonfunktion und die Kozustandsvariable) einführt. Im weiteren werden die Bedingungen des Maximum-Prinzips ökonomisch interpretiert und hergeleitet. Es folgen Unterkapitel zu Suffizienzkriterien der Bedingungen, sowie zur Bestimmung einer stationären Lösung. Abschliessend wird das mehrdimensionale Maximum-Prinzip angesprochen.

3.1 Die Hamiltonfunktion und die Kozustandsvariable

Bevor wir das Maximum-Prinzip erläutern können müssen wir zunächst eine Hilfsfunktion H und eine Hilfsvariable λ einführen. In Kapitel 1.3 wurde die Ähnlichkeit von Statischer und Dynamischer Optimierung bereits angesprochen. Hier manifestiert sich diese Ähnlichkeit nun zum ersten Mal. In der statischen Optimierung bildet man die Lagrangefunktion mit

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda(c - g(\mathbf{x})) \qquad (3.1)$$

wobei $f(\mathbf{x})$ die Zielfunktion und $c - g(\mathbf{x})$ die Restriktion bezeichnet. Ganz analog bildet man in der Dynamischen Optimierung mittels OKT die so genannte Hamiltonfunktion aufbauend auf unserem allgemeinen Problem (2.18) mit

$$H_{pv}(x(t), u(t), \lambda_{pv}) = h(x(t), u(t)) * e^{-rt} + \lambda_{pv} * g(x(t), u(t)) \qquad (3.2)$$

Die Ähnlichkeit ist sehr schön zu sehen. Das Maximum-Prinzip ist sozusagen eine Erweiterung der Lagrangemethode auf die Dynamische Optimierung[63]. λ gibt dabei in beiden Fällen den Schattenpreis der Ressourcen an – doch darauf werden wir später noch ausführlicher eingehen. Genau wie in der statischen Optimierung werden zur Lösung des Problems eine

[62] Robert Dorfman, „An Economic Interpretation of Optimal Control Theory," *The American Economic Review* 59 (1969): S.817-831.

[63] Intriligator, S.351.

Reihe von Bedingungen erster Ordnung aufgestellt, deren Lösung zugleich die Lösung des Ausgangsproblems ist.

Die Indizes pv bei H und λ weisen explizit darauf hin, dass es sich um present-value Werte handelt. Für eine ökonomische Interpretation, an der wir letztendlich interessiert sind, ist allerdings eine andere Form vorteilhafter. Indem man Gleichung (3.2) mit e^{rt} multipliziert, erhält man die entsprechenden Momentanwerte

$$H_{pv}(x(t), u(t), \lambda_{pv}) * e^{rt} = h(x(t), u(t)) + \lambda_{pv} * e^{rt} * g(x(t), u(t)) \qquad (3.3)$$

Durch die Neudefinitionen

$$H_{pv}(x(t), u(t), \lambda_{pv}) * e^{rt} = H(x(t), u(t), \lambda) \qquad (3.4)$$

und

$$\lambda_{pv} * e^{rt} = \lambda \qquad (3.5)$$

wird Gleichung (3.3) zu

$$H(x(t), u(t), \lambda) = h(x(t), u(t)) + \lambda * g(x(t), u(t)) \qquad (3.6)$$

Wie wir sehen werden geben H und λ in dieser Form das momentane Einkommen, bzw. den momentanen Schattenpreis zur Zeit t an.

3.2 Ökonomische Interpretation der Hamiltonfunktion und der Kozustandsvariablen

Die Bedingungen des Maximum-Prinzips, bzw. zunächst die Hamiltonfunktion und die Kozustandvariable, lassen sich am anschaulichsten interpretieren, wenn man sich folgendes Beispiel vor Augen führt. Das OKT-Programm (2.18) beschreibe eine Firma, die den Gesamtbarwert ihrer Gewinne über die Zeit maximiert. Die Gewinnfunktion ist dabei durch h(x(t), u(t)) gegeben. Die Kontrollvariable u(t) bezeichne das Nettoinvestment, welches die Zustandsvariable x(t), das Kapital der Firma, verändert.

3.2.1 Die Kozustandsvariable λ als Schattenpreis

$\lambda(t)$ bezeichnet den Wert zu jedem Zeitpunkt, den eine zusätzliche Einheit eines Inputs, in unserem Beispiel eine zusätzliche Einheit an Kapital, zum Gesamtbarwert beiträgt[64]. Es ist somit auch der maximale Preis, den die Firma für diese marginale Einheit zahlen würde und deshalb eignet sich $\lambda(t)$ auch bestens als ‚interner Verrechnungspreis', mit dem die Firma ihren Bestand an Kapital intern bewertet.

[64] Dixit, S.43.

Dieser Zusammenhang kann auch mathematisch gezeigt werden[65].

3.2.2 Die Hamiltonfunktion H als wahres Einkommen

Unter diesen Voraussetzungen bezeichnet H das wahre Einkommen der Firma, so wie es auch in der Bilanz aufgeführt wäre. Wahres Einkommen bedeutet, dass nicht nur der momentane Gewinn, sondern auch der faire Wert der momentanen Nettoinvestitionen bilanziert wird. Dies muss so sein, weil eine reine Fokussierung auf den momentanen Gewinn zu kurzsichtig wäre, denn nötige Nettoinvestitionen würden sonst unterbleiben. Dies kann man folgendermassen erkennen:

Die Hamiltonfunktion in Momentanwerten ist gegeben durch

$$H(x(t), u(t), \lambda) = h(x(t), u(t)) + \lambda * g(x(t), u(t)) \tag{3.7}$$

Die nachfolgende Abbildung deutet die einzelnen Bestandteile dieser Gleichung. Dabei wird auch klar wieso die Hamiltonfunktion in Momentanwerten bevorzugt wird. In dieser Form gibt sie das jeweils aktuelle Einkommen zum Zeitpunkt t an, die Analogie zur Bilanz ist somit offensichtlich.

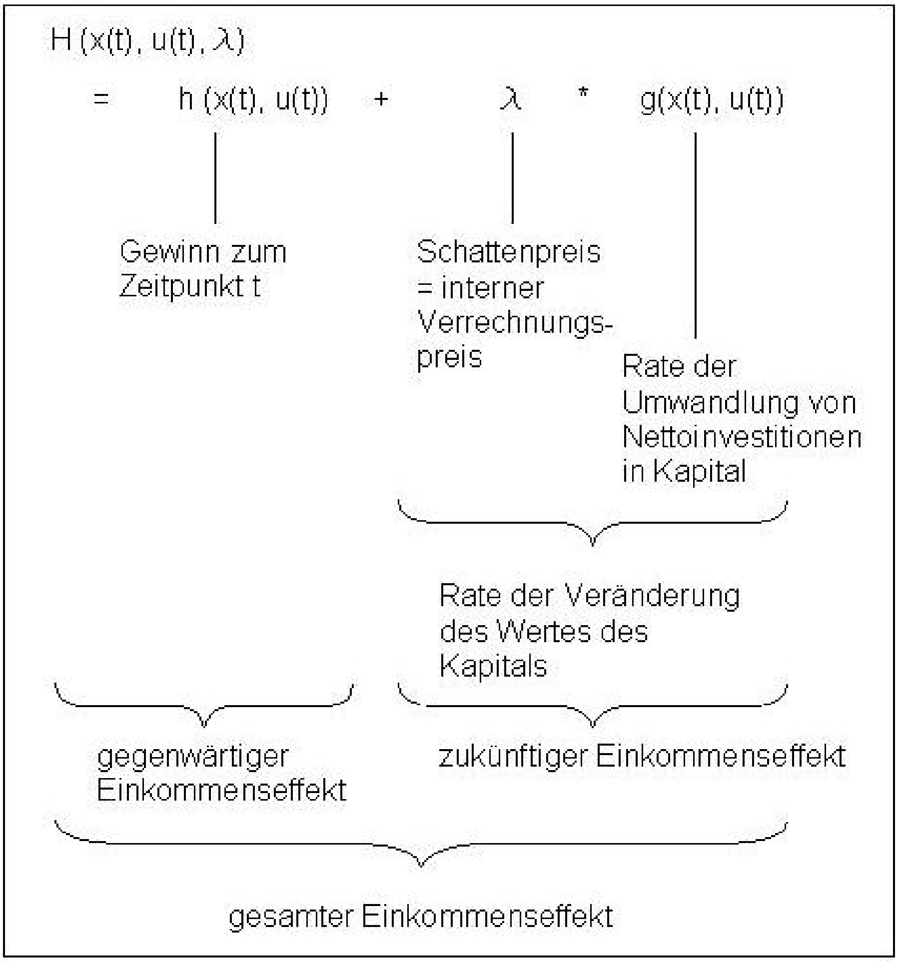

Abb. 6, Aufsplittung der Hamiltonfunktion in Einkommenseffekte[66]

[65] Siehe Leonard and Long, S.153-155.

3.3 Die Bedingungen des Maximum-Prinzips im eindimensionalen Fall

Nachfolgend werden die Bedingungen des Maximum-Prinzips für den Fall einer Kontroll- und einer Zustandsvariablen zunächst angegeben. Kapitel 3.4 – 3.7 widmen sich dann ihrer Herleitung.

Die Bedingungen des Maximum-Prinzips[67]:

[#1] $$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \tag{3.8}$$

[#2a] $$-\frac{\partial H}{\partial x} + r\lambda = \dot{\lambda} \tag{3.9}$$

[#2b] $$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{x} = g(x(t),\ u(t)) \tag{3.10}$$

[#3] $$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) * x(t) * e^{-rt} = 0 \tag{3.11}$$

3.4 Ökonomische Interpretation von Bedingung [#1]

[#1] $$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \tag{3.8}$$

Die erste Bedingung des Maximum-Prinzips besagt, dass der Optimierer, in diesem Beispiel also die Firma, zu jedem Zeitpunkt das wahre Einkommen maximiert, indem sie die Kontrollvariable Nettoinvestition entsprechend anpasst. Es liegt hier eine typische Grenzgewinnargumentation vor – u wird so lange erhöht bis die dadurch bewirkte marginale Veränderung von H gleich null ist, also keine weitere Erhöhung des Gesamteinkommens mehr möglich ist. Ein wichtiger Unterschied zur Statischen Optimierung besteht darin, dies zu jedem Zeitpunkt der Periode zu tun. Man muss allerdings einwenden, dass [#1] für sich allein genommen eigentlich noch kein dynamisches Element aufweist, sondern eine Sequenz von statischen Problemen ist.

---

[66] Chiang, S.205-206, Grafik beruht auf eigener Darstellung.

[67] Für [#1], [#2a] und [#2b] siehe Leonard and Long, S.128-129, oder Chiang, S.207-208.
Für [#3] siehe Weitzman, S. 77.

D.h. auch, dass man das Problem im Prinzip in eine Sequenz von Subproblemen transformieren könnte, die man dann jeweils optimiert. Die Verbindung zur Dynamischen Programmierung tritt somit zu Tage[68].

Ausschreiben von Gleichung (3.8) gewährt eine weitere wertvolle Einsicht[69]. Aus

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \tag{3.8}$$

wird

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial u} + \lambda * \frac{\partial g}{\partial u} = 0 \tag{3.12}$$

und daraus erhält man

$$\lambda * \frac{\partial g}{\partial u} = -\frac{\partial h}{\partial u} \tag{3.13}$$

Dies bedeutet[70], dass ein optimales u so gewählt werden muss, dass der marginale Anstieg des zukünftigen Einkommenseffekts gerade gleich der marginalen Abnahme des gegenwärtigen Einkommenseffekts ist. In unserem Anschauungsbeispiel ergibt dies durchaus Sinn. Eine Erhöhung der Nettoinvestition senkt den gegenwärtigen Gewinn, also den gegenwärtigen Einkommenseffekt, und erhöht den zukünftigen Einkommenseffekt, weil in der Zukunft mit mehr Kapital auch ein höheres Einkommen erzielt werden kann[71]. Diese beiden Effekte müssen sich zwingend ausgleichen, weil das Vorgehen der Firma sonst nicht optimal wäre – sie könnte ihren Gesamtbarwert erhöhen, wenn sie ihre Nettoinvestition so anpasst, dass Gleichung (3.13) wieder gilt.

Für eine grafische Darstellung dieses Sachverhalts kann Gleichung (3.13) umgeformt werden zu

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial u}}{\frac{\partial g}{\partial u}} = -\lambda \tag{3.14}$$

Dies ist die Grenzrate der Transformation (GRT)[72] zwischen gegenwärtigem Einkommen h, und zukünftigem Einkommen g[73]. Sie gibt an in welchem Verhältnis h in g umgeformt werden

---

[68] Leonard and Long, S.156-157.

[69] Chiang, S.208.

[70] In Zusammenhang mit obiger Abbildung 6.

[71] Das gilt auch umgekehrt. Eine negative Nettoinvestition, also ein Verkauf vorhandenen Kapitals erhöht den gegenwärtigen Einkommenseffekt um den Verkaufserlös, senkt im Gegenzug aber das mögliche zukünftige Einkommen, weil weniger Kapital zur Produktion bereitsteht.

[72] Engl. Marginal Rate of Transformation (MRT). Für Details siehe: Hal R. Varian, *Grundzüge der Mikroökonomik*, 6. Auflage (München: Oldenbourg Verlag, 2003), S.595-596.

[73] Weitzman, S. 105.

kann, und umgekehrt. Im Gleichgewicht muss die GRT gleich dem entsprechenden relativen Preis λ sein[74]. Dies ist eine typische mikroökonomische Tangentialbedingung wie sie in der Statischen Optimierung üblich ist.

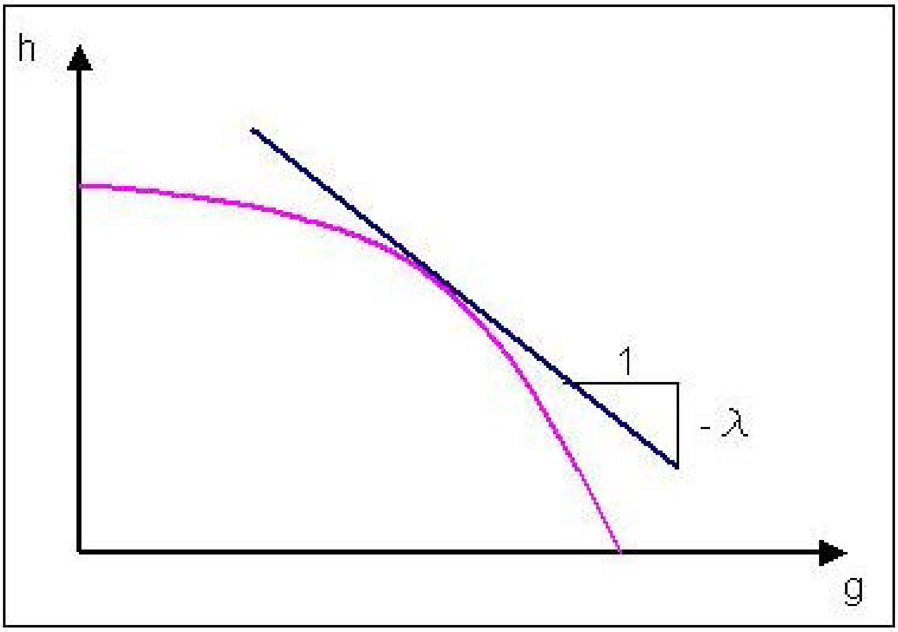

Abb. 7, Bedingung [#1] als Tangentialbedingung, eigene Darstellung

3.5 Ökonomische Interpretation und Herleitung von Bedingung [#2a]

Gleichung [#2a] besagt

$$-\frac{\partial H}{\partial x} + r\lambda = \dot{\lambda} \tag{3.9}$$

sie ist eine „dynamische Beschreibung eines Marktes für (physisches) Kapital im Gleichgewicht“[75]. Sie ist im Grunde die wichtigste Bedingung des Maximum-Prinzips.

3.5.1 Ökonomische Herleitung von Bedingung [#2a]

Für diese Herleitung ist das Konzept der Arbitragefreiheit essentiell. Arbitrage bezeichnet den gleichzeitigen Kauf und Verkauf verschiedener Anlagen, so dass durch die geschickte

[74] Das negative Vorzeichen in (3.14) gehört in dieser Interpretation eigentlich auf die linke Seite der Gleichung. In dieser Form hat (3.14) aber in der Abb. 7 eine natürliche Bedeutung als negative Steigung der Preisgeraden.

[75] Weitzman, S.106.

Kombination ein risikoloser Profit möglich wird[76]. Arbitragefreiheit bedeutet, dass dies nicht möglich ist, und wird in der Regel in effizienten Kapitalmärkten vorausgesetzt[77].

Angenommen ein Investor kauft (physisches) Kapital, welches $\lambda(t)$ kostet. Sagen wir er kauft eine Menge $1/\lambda(t)$, so dass er genau CHF 1.00 dafür bezahlt. Er produziert damit zusätzliches Einkommen in Höhe von

$$\frac{\frac{\partial \tilde{H}}{\partial K}}{\lambda(t)} \tag{3.15}$$

d.h. in der (sehr kleinen) Zeitperiode ε, zwischen Zeit t und $t+\varepsilon$, hat er einen Gewinn aus Produktion erzielt

$$\frac{\frac{\partial \tilde{H}}{\partial K}}{\lambda(t)} * \varepsilon \tag{3.16}$$

ausserdem hat er eine Vermögensänderung durch eine mögliche Neubewertung des Kapitals zu berücksichtigen. Es gilt hierfür

$$\frac{\lambda(t+\varepsilon) - \lambda(t)}{\lambda(t)} \tag{3.17}$$

Insgesamt hat er also einen Gewinn von

$$\frac{\frac{\partial \tilde{H}}{\partial K} * \varepsilon + \lambda(t+\varepsilon) - \lambda(t)}{\lambda(t)} \tag{3.18}$$

Stattdessen hätte der Investor sein Geld von Anfang an zu einer Bank etc. bringen können, um dort den gängigen Zinssatz r zu verdienen. Sein CHF 1.00 wäre in der betrachteten Zeitperiode um

$$r * \varepsilon \tag{3.19}$$

angewachsen. Unter der Voraussetzung, dass kein Arbitrage möglich ist, muss (3.18) gleich (3.19) sein, sonst hätte man durch gleichzeitiges Kaufen und Verkaufen beider Anlagen risikolos[78] Geld verdienen können. Es folgt also

$$\frac{\frac{\partial \tilde{H}}{\partial K} * \varepsilon + \lambda(t+\varepsilon) - \lambda(t)}{\lambda(t)} = r * \varepsilon \tag{3.20}$$

Diese Gleichung kann umgeformt werden zu

---

[76] Siehe: Salih N. Neftci, *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, 2nd ed. (London: Academic Press, 2000), S.27.

[77] Genaugenommen ist ein Kapitalmarkt u.a. nur dann effizient, wenn es Arbitragefreiheit gibt.

[78] In diesem stilisierten Beispiel wird die Risikolosigkeit der Anlage vorausgesetzt.

$$\frac{\lambda(t+\varepsilon)-\lambda(t)}{\lambda(t)} = r*\varepsilon - \frac{\frac{\partial\tilde{H}}{\partial K}}{\lambda(t)}*\varepsilon \tag{3.21}$$

bzw. zu

$$\frac{\lambda(t+\varepsilon)-\lambda(t)}{\varepsilon} = r*\lambda(t) - \frac{\partial\tilde{H}}{\partial K} \tag{3.22}$$

Wenn man schliesslich ε infinitesimal klein wählt, also den Limes für $\varepsilon \rightarrow 0$ berechnet, so wird (3.22) zu [#2a].

3.5.2 Ökonomische Interpretation von Bedingung [#2a]

Gleichung (3.9) kann umgeschrieben werden zu

$$-\dot{\lambda} + r\lambda = \frac{\partial H}{\partial x} \tag{3.23}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lautet ausgeschrieben

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} + \lambda * \frac{\partial g}{\partial x} \tag{3.24}$$

Somit kann (3.23) in folgender Form dargestellt werden

$$-\dot{\lambda} + r\lambda = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} + \lambda * \frac{\partial g}{\partial x} \tag{3.25}$$

Diese Gleichung beinhaltet folgenden Komponenten[79]:

- $-\dot{\lambda}$ misst die Entwertungsrate des Kapitals. Sie greift insbesondere Bewertungsänderungen aus einer Neubewertung des Kapitals auf.
- $r\lambda$ stellt den Zinsgewinn dar, den eine Einheit Kapital einbringt, wenn das Kapital mit dem internen Verrechnungspreis λ bewertet wird. Es ist also der Geldwert des Kapitals mal den entsprechenden Zinssatz.
- $-\dot{\lambda} + r\lambda$ stellt dann den Nettoertrag dar, den eine Kapitaleinheit z.B. bei einer Bank einbringen würde. Der Nettoertrag setzt sich zusammen aus der (negativen) Neubewertung des Kapitalswerts, und zum anderen aus dem Zinsgewinn.
- $\frac{\partial H}{\partial x}$ ist der marginale Beitrag einer zusätzlichen Kapitaleinheit zum wahren Gesamteinkommen. Dass dieser marginale Gleichung wegen (3.23) gleich dem obi-

[79] Für Details dazu und zur Interpretation siehe: Feichtinger und Hartl, S. 29-30.

gen Nettoertrag, den eine Investition auf der Bank bringen würde, sein muss, ist eine Konsequenz aus der angesprochenen Arbitragefreiheit.
Er setzt sich wiederum zusammen aus den beiden Komponenten

- $\frac{\partial h}{\partial x}$, das ist der direkte Grenzertrag, den eine zusätzliche Einheit Kapital unmittelbar zum gegenwärtigen Einkommen beiträgt.
- $\lambda * \frac{\partial g}{\partial x}$, das ist der indirekte Grenzertrag, den eine zusätzliche Einheit Kapital zum zukünftigen Einkommen beitragen wird, indem sie den Kapitalstock erhöht, was wiederum die künftigen Gewinnmöglichkeiten steigert.

Nun ist klar wieso [#2a] entlang der optimalen Lösung gelten muss. Würde sie nicht gelten, könnte man die optimale Lösung entweder um eine Einheit Kapital reduzieren, diese Kapitaleinheit zum Schattenpreis λ verkaufen und den Erlös mit Gewinn bei einer Bank investieren. Oder man ginge umgekehrt vor, würde sich also Geld bei der Bank leihen, und damit eine zusätzliche Einheit Kapital kaufen, die mehr zusätzliches Einkommen bringt als das Leihen bei der Bank gekostet hat. Das Problem dabei ist, dass eine Lösung nicht optimal sein kann solange solch ein Vorgehen möglich ist. Erst wenn Bedingung [#2a] gilt gibt es ein Gleichgewicht auf dem Kapitalmarkt und eine Lösung kann optimal sein[80].

Wie man sehen kann kombiniert Bedingung [#2a] wesentliche ökonomische Konzepte wie Grenzerträge, Kapitalbewertungen, Arbitragefreiheit, und Gleichgewicht auf Kapitalmärkten in einer Gleichung. Wegen ihres dynamischen Charakters wird sie manchmal auch als Bewegungsgleichung bezeichnet[81].

3.6 Bedingung [#2b]

Für Bedingung [#2b] gibt es dagegen keine spezielle Herleitung oder Interpretation. Sie folgt bereits unmittelbar aus dem allgemeinen Problem (2.18) und bildet gemeinsam mit Bedingung [#2a] ein System von Differentialgleichungen[82], dessen Lösung ein wichtiger Teil der Gesamtlösung ist.
Im Wesentlichen gibt [#2b] den funktionalen Zusammenhang zwischen der Kontroll- und der Zustandvariablen an.

---

[80] Feichtinger und Hartl, S.30.

[81] Chiang, S.208.

[82] Die sogenannten kanonischen Differentialgleichungen.

3.7 Ökonomische Interpretation und Herleitung von Bedingung [#3]

$$\text{[\#3]} \quad \lim_{t \to \infty} \lambda(t) * x(t) * e^{-rt} = 0 \tag{3.11}$$

Bedingung [#3] ist die Transversalitätsbedingung, also eine Art Endbedingung. Sie wird benötigt, um das Problem zu ‚schliessen', d.h. ohne sie würde der Optimierer möglicherweise den besten Zeitpfad von x (0) = x_0 bis hin zu x (t) wählen, aber x (t) wäre nicht optimal. In anderen Worten folgt er zwar dem optimalen Weg, allerdings zum falschen Ziel[83].

Das folgende Unterkapitel zeigt zunächst wieso [#3] gelten muss.

3.7.1 Ökonomische Herleitung von Bedingung [#3]

Angenommen [#3] würde nicht gelten. Stattdessen gelte

$$\lim_{t \to \infty} \lambda(t) * x(t) * e^{-rt} = A \quad ; A > 0 \tag{3.26}$$

Wenn ein Investor, der einem ökonomischen Programm (2.18) folgt, sich entschliesst zum Zeitpunkt t = T seinen kompletten Kapitalstock x(T) zu verkaufen, so hat er im Laufe der Betrachtungsperiode (von t = 0 bis t = T) einen Gesamtbarwert von

$$\int_0^T h(x(t), u(t), t) * e^{-rt}\, dt + \lambda(T) * x(T) * e^{-rT} \tag{3.27}$$

erzielen können. Wenn nun T beliebig gross wird, nähert sich (3.27) beliebig nahe an

$$\int_0^\infty h(x(t), u(t), t) * e^{-rt}\, dt + A \tag{3.28}$$

wenn wir das nun vergleichen mit

$$\int_0^\infty h(x(t), u(t), t) * e^{-rt}\, dt \tag{3.29}$$

ist es offensichtlich, dass wir lieber einen Wert hätten, der beliebig nahe an (3.28) herankommt als einen Wert in Höhe von (3.29).

Nun würden aber alle Investoren so denken und deshalb ihr Kapital x(t) verkaufen wollen. Durch das grosse Angebot an Kapital entsteht ein Preisdruck, der A so lange sinken lässt bis es den Wert null erreicht. Daraus folgt, dass nicht (3.26), sondern [#3] gilt.

□

[83] Weitzman, S.108.

3.7.2 Ökonomische Interpretation von Bedingung [#3]

Bedingung [#3] besagt im Prinzip, dass der Wert des Kapitals am Ende der Betrachtungsperiode null sein muss[84]. In der Gleichung

$$\lim_{t \to \infty} \lambda(t) * x(t) * e^{-rt} = 0 \tag{3.11}$$

ist dies vielleicht nicht sofort zu erkennen, es wird aber schnell klar, wenn man bedenkt, dass wir oben vereinbart haben Momentanwerte für H und λ zu verwenden. Aus diesem Grund ist auch der Exponentialterm in (3.11) enthalten. Unter Verwendung der Regel (3.5)

$$\lambda_{pv} * e^{rt} = \lambda \tag{3.5}$$

erhalten wir Bedingung [#3] in present-value Form

$$\lim_{t \to \infty} \lambda_{pv}(t) * x(t) = 0 \tag{3.30}$$

Der heutige Wert des Kapitalstocks zur Zeit t = ∞ ist null. Dies ist notwendig, weil die Lösung sonst nicht optimal sein kann. Wenn nach der letzten Zeitperiode das Kapital noch etwas wert ist, hätte man es auch in der letzten Periode zu diesem Wert verkaufen können und seine Lösung somit verbessert. Schliesslich endet das Problem und der Optimierer hat danach keinen Nutzen mehr aus seinem Kapitalstock. Eine optimale Lösung muss also so gestaltet sein, dass nach Ablauf des Betrachtungszeitraums alle Werte verbraucht bzw. veräussert sind [85].

3.8 Notwendige und hinreichende Bedingungen

Die Bedingungen des Maximum-Prinzips sind zunächst notwendig. Ihre Lösung ergibt einen Kandidaten für eine optimale Lösung, der dann noch mittels hinreichenden Bedingungen auf seine Optimalität geprüft werden kann.

In unserer Problemformulierung sind die Bedingungen das Maximum-Prinzips sowohl notwendig als auch hinreichend. D.h. also, eine Lösung der Bedingungen des Maximum-Prinzips ist automatisch die optimale Lösung unseres Problems.

Nach den Theoremen von Mangasarian und Arrow ist das Maximum-Prinzip auch hinreichend, genau dann, wenn die Hamiltonfunktion entlang der optimalen Lösung konkav in x(t) und u(t) ist[86].

Die Hamiltonfunktion lautet[87]

---

[84] Majumdar Mukul, Tapan Mitra and Kazuo Nishimura, Eds., *Optimization and Chaos* (Springer: Berlin, 2000), S.55.

[85] Chiang spricht davon, dass „alle Profitmöglichkeiten ausgeschöpft sein müssen“, S.243.

[86] Chiang, S.214-221.

$$H\,(x^*(t), u^*(t), \lambda^*) \;=\; h\,(x^*(t), u^*(t)) + \lambda^* \ast g(x^*(t), u^*(t)) \qquad (3.6)$$

Diese Funktion ist konkav, denn wir haben oben angenommen, dass f konkav in x und u, und g entweder konkav oder linear in x und u ist. Die Summe aus zwei konkaven Funktionen, bzw. die Summe aus einer konkaven und einer linearen Funktion, ist wieder konkav. Um einer etwaigen Unklarheit vorzubeugen, sei auf folgendes hingewiesen: erstens, wenn f konkav ist, so ist auch h konkav, siehe dazu Anhang 4. Zweitens, entlang eines optimalen Pfades muss $\lambda^* \geq 0$ gelten. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Interpretation von λ als Schattenpreis, da es sonst geboten wäre x solange zu reduzieren bis λ wieder nichtnegativ ist.

3.9 Eine stationäre Lösung Problems

Eine analytische Lösung des Maximum-Prinzips wird in Kapitel 4 berechnet. An dieser Stelle soll zunächst das Konzept einer stationären Lösung erläutert, und eine Formel für ihre Berechnung hergeleitet werden.

3.9.1 Grundidee einer stationären Lösung

Die Bedingungen des Maximum-Prinzips führen zu einer optimalen Lösung $(x^*(t), u^*(t))$, die für jedes t die optimale Wahl der Variablen angibt. Für $t \to \infty$ wird diese Lösung gegen ein stationäres Niveau konvergieren[88]. Stationär bedeutet in diesem Zusammenhang eine Art gleichgewichtige Lösung. Sobald die optimale Lösung die stationäre Lösung erreicht hat, verbleibt sie an dieser Stelle[89].

Für die Gesamtlösung bietet die stationäre Lösung zwei Vorteile. Erstens, zeigt sie die Richtung an, in die es geht. Sie ist also eine Art Wegweiser für die optimale Lösung. Zweitens, kann man sie verwenden, um die analytische Lösung der Bedingungen des Maximum-Prinzips einfacher zu gestalten. Wir werden dies in Kapitel 4 sehen.

---

[87] $x^*(t)$ ist dabei die optimale Lösung für x(t), u.s.w.

[88] Feichtinger und Hartl, S.39-40.

Interessant ist an dieser Stelle auch der Blick auf eine Problemstellung mit endlichem Zeithorizont. In diesem Fall wird sich eine optimale Lösung so schnell wie möglich einer stationären Lösung annähern, und dort solange wie möglich verbleiben, um erst gegen Ende des Betrachtungszeitraums den stationären Punkt wieder zu verlassen und den geforderten Endpunkt anzunehmen. Dieses Verhalten ist als ‚Turnpike-Theorem' bekannt.

[89] Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass es allerdings nicht in jedem Problem möglich ist die stationäre Lösung auch zu erreichen, weil u.U. Restriktionen dies verhindern. Die optimale Lösung wird aber zumindest ‚versuchen' sich der stationären Lösung anzunähern

3.9.2 Herleitung einer Formel zur Bestimmung der stationären Lösung

Aus obigen Überlegungen ergibt sich, dass die stationäre Lösung ein konstanter Wert ist. Wir können ihn mit

$$\hat{x} \qquad (3.31)$$

bezeichnen. Daraus ergibt sich auch, dass die Kontrollvariable keinen Einfluss mehr auf die Zustandsvariable hat, denn sonst würde diese sich ändern und nicht konstant bleiben. Es gilt also

$$\hat{u} = 0 \qquad (3.32)$$

Die Formel kann nun auf zwei verschiedene Arten hergeleitet werden. Die eine nutzt elegant die Bedingungen des Maximum-Prinzips und zeigt dadurch insbesondere wie die verschiedenen Konzepte miteinander verwoben sind. Sie ist in Anhang 5 aufgeführt. Die zweite ist zunächst völlig unabhängig vom Maximum-Prinzip und basiert ausschliesslich auf ökonomischen Überlegungen. Sie wird im folgenden dargestellt[90].

Für diese Herleitung bedienen wir uns wieder des kleinen Beispiels aus Kapitel 3.2: eine Firma, die ihre Zustandsvariable Kapital durch Verändern ihrer Kontrollvariable Nettoinvestition, verändert.

Die Firma kann sich im Prinzip zu jedem Zeitpunkt dazu entscheiden ihre Nettoinvestition auf null zu setzen und dadurch ihr Kapital konstant zu halten. Die entscheidende Frage ist wann sie dies tun will, wann also ein solches Verhalten für sie optimal ist? Nehmen wir also an, u sei zu Beginn einer Periode null und die Firma muss einen Wert für u wählen. Falls die Firma einen positiven Wert für u setzt, also investiert, wird sie dadurch künftig mehr Kapital zur Verfügung haben und damit mehr Gewinn machen können. Der (abdiskontierte) Zuwachs einer Erhöhung um ε bringt der Firma[91]

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial x}(x_1, 0) * \varepsilon}{r} \qquad (3.33)$$

Zunächst muss sie die Kapitalerhöhung allerdings bezahlen. Dies mindert ihren Gewinn um

$$-\frac{\partial h}{\partial u}(x_1, 0) * \varepsilon \qquad (3.34)$$

Es ist klar, dass die Firma nur investieren wird, wenn (3.33) > (3.34) ist. Sie ist indifferent wenn (3.33) = (3.34) gilt. Also

---

[90] Siehe Weitzman, S.19-22.

[91] $\frac{\partial h}{\partial x}(x_1, 0)$ ist dabei die Ableitung der Gewinnfunktion nach x, ausgewertet an der Stelle $(x_1, 0)$.

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial x}(x_1, 0) * \varepsilon}{r} = -\frac{\partial h}{\partial u}(x_1, 0) * \varepsilon \qquad (3.35)$$

Mittels einer kleinen algebraischen Umformung erhält man

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial x}(x_1, 0)}{-\frac{\partial h}{\partial u}(x_1, 0)} = r \qquad (3.36)$$

Dies ist die gesuchte Formel für die stationäre Lösung. Falls die linke Seite von Gleichung (3.36) grösser ist als die rechte, so ist es ratsam in mehr Kapital zu investieren, weil der Gesamtbeitrag zum Gewinn grösser als die Kosten des zusätzlichen Kapitals sind. Ist, dagegen, die linke Seite kleiner als die rechte, besteht die beste Unternehmenspolitik darin, Kapital zu veräussern, weil der Grenzbeitrag des Kapitals seine (Opportunitäts-)Kosten nicht rechtfertigen kann. Nur wenn (3.36) exakt gilt, hat die Firma keinen Anlass ihren Kapitalstock zu verändern und die stationäre Lösung ist erreicht.

3.10 Die Bedingungen des Maximum-Prinzips im mehrdimensionalen Fall

Die meisten ökonomischen Probleme beinhalten mehrere Zustands- und Kontrollvariablen, da dies eine bessere Abbildung der Realität ist. Die Optimale Kontrolltheorie und das Maximum-Prinzip können mehrdimensionale Problemstellungen relativ einfach behandeln. Eine eventuelle Schwierigkeit besteht allerdings in der analytischen Lösung der Bedingungen des Maximumprinzips, das im mehrdimensionalen Fall die Zahl der Gleichungen wächst. So gibt es beispielsweise für jede weitere Zustandsvariable zwei zusätzliche Gleichungen. Doch soll nun zunächst das Maximum-Prinzip für den mehrdimensionalen Fall angegeben werden.

Im mehrdimensionalen lautet die Hamiltonfunktion:

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda) = h(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \lambda^{\mathbf{T}} * \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \qquad (3.37)$$

Man beachte insbesondere, dass nun jeder Zustandsvariable x über die Restriktion g ein jeweiliger Schattenpreis λ zugeordnet ist. Dies macht sofort intuitiv Sinn, weil jetzt jedes λ_i für die korrespondierende Zustandsvariable $x_i(t)$ angibt wieviel eine weitere Einheit zum Gesamtwert beitragen kann.

Die Bedingungen des Maximum-Prinzips im mehrdimensionalen Fall entsprechen denen des eindimensionalen Falls mit dem Unterschied nun Vektoren zu beinhalten. Sie lauten:

[#1] $$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0 \qquad (3.38)$$

[#2a] $$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + r\,\boldsymbol{\lambda} \tag{3.39}$$

[#2b] $$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t)) \tag{3.40}$$

[#3] $$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\lambda}(t)^{\mathrm{T}} * \mathbf{x}(t) * e^{-r\,t} = 0 \tag{3.41}$$

Die Lösung dieser Gleichungen löst das entsprechende mehrdimensionale Kontrollproblem in (2.18).

4 Fallbeispiel: Optimale Investitionsplanung

Im Rahmen dieses Fallbeispiels wird eine analytische Lösung einer spezifischen wirtschaftswissenschaftlichen Problemstellung erarbeitet. Es wird ein eindimensionales Problem analysiert, weil man in diesem Fall auch sehr schön eine grafische Analyse durchführen kann, während dies in einem mehrdimensionalen Problem nicht oder nur sehr eingeschränkt möglich ist.
Die Optimale Kontrolltheorie kann zur Behandlung einer Vielzahl ökonomischer Probleme verwendet werden. U.a. für Instandhaltungsprobleme, Optimale Lagerhaltung, Wahl optimaler Werbestrategien, Umweltschutzprobleme, Ressourcenmanagement, u.s.w. um nur einige zu nennen.
In diesem Fallbeispiel wird das Problem der optimalen Investitionsplanung einer Gewinnmaximierenden Unternehmung untersucht. Sie kann die Höhe ihrer Nettoinvestition festlegen und dadurch ihren Kapitalstock verändern. Dieses Beispiel wurde weiter oben bereits kurz eingeführt. Eine entscheidende Modifikation stellt die Berücksichtigung von Anpassungskosten dar[92].

4.1 Modellformulierung

4.1.1 Die Produktionsfunktion

Da wir ein eindimensionales Problem untersuchen wollen, kann auch nur eine Zustandsvariable eingebunden werden. Für die Produktionsfunktion bedeutet dies, dass sie nur vom Kapitalstock K abhängt. Andere Einflussgrössen wie beispielsweise Arbeit werden konstant gehalten. Im Grunde ist unsere Produktionsfunktion also eine partielle Produktionsfunktion unter Konstanthalten aller übrigen Einflussgrössen. Wir wählen eine einfache, konkave Funktion der Form

$$a\,x - \frac{1}{2}\,b\,x^2 \tag{4.1}$$

wobei a und b konstante, reelle Koeffizienten sind, mit $a, b > 0$. Abbildung 8 stellt diese Funktion für die Parameterwerte $a = 10$ und $b = 1$ dar.

[92] In der Literatur ist dieses Modell auch als ‚q-Theory of Investment' bekannt. Siehe z.B.: David Romer, *Advanced Macroeconomics*, 2nd ed. (New York: McGraw-Hill, 2001), S.367-406.

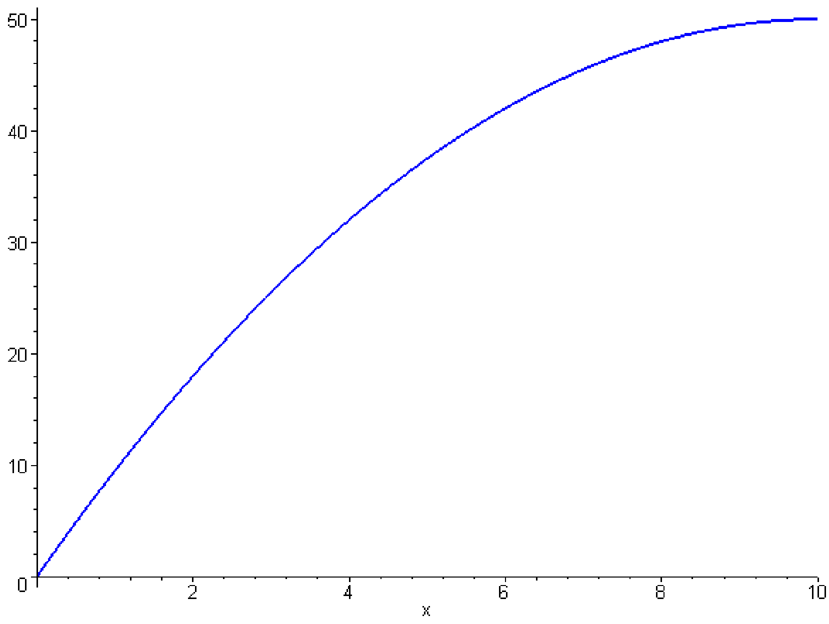

Abb. 8, Die Produktionsfunktion, eigene Darstellung

4.1.2 Anpassungskosten

Anpassungskosten entstehen sowohl intern als auch extern[93]. Intern entstehen sie dadurch, dass die neuen Anlagen und Maschinen installiert, Mitarbeiter geschult oder der Produktionsprozess umgestellt werden muss[94]. Extern entstehen Anpassungskosten zum einen, wenn für den Kauf des Kapitals Kredite aufgenommen werden müssen, die mit steigender Kredithöhe immer teurer werden. Zum anderen durch erhöhte Transaktionskosten bei dem Erwerb bzw. der Veräusserung von Spezialmaschinen etc. Es macht deshalb Sinn eine konvexe Funktion der Form[95]

$$c\,u^2 \qquad (4.2)$$

für die Anpassungskosten anzunehmen, wobei c ein konstanter reeller Koeffizient ist mit $c > 0$. Für den Fall $c = 0.01$ stellt Abbildung 9 diese Funktion dar.

[93] Peter M. Kort, *Optimal Dynamic Investment Policies of a Value Maximizing Firm* (Berlin: Springer, 1989), S. 44-47.

[94] Bzw. auch umgekehrt, wenn Kapital abgebaut wird.

[95] Weitzman, S.148.

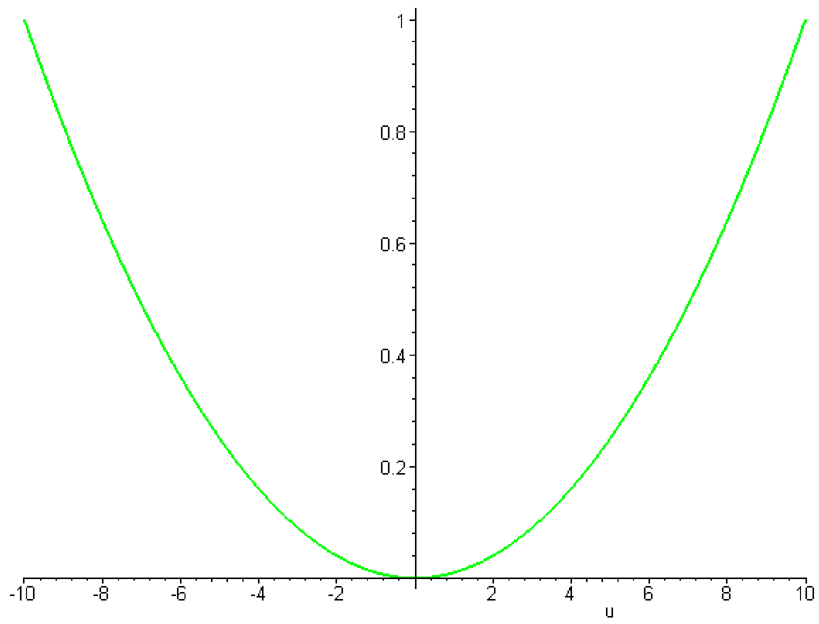

Abb. 9, Anpassungskostenfunktion, eigene Darstellung

4.1.3 Die Investitionsfunktion

Wir betrachten Nettoinvestitionen. D.h., dass allfälliger Verschleiss bereits berücksichtigt ist. In anderen Worten, bei einer Nettoinvestition von exakt null bleibt der Kapitalstock genau gleich. Es gibt also eine Bruttoinvestition in Höhe des Verschleisses; defekte Maschinen werden ersetzt u.s.w. Die Nettoinvestitionen verändern den Kapitalstock durch

$$\dot{x} = u \tag{4.3}$$

Der Preis der Investitionen ist dabei auf 1 normiert. D.h., dass nun eine Einheit an Investition eine zusätzliche Einheit Kapital bedingt etc.

4.1.4 Die Gewinnfunktion

Unter der harmlosen Annahme, dass die betrachtete Unternehmung atomistisch klein ist, gemessen am Gesamtmarkt, und mit anderen Unternehmungen in einem perfekten Wettbewerb steht, können wir annehmen, dass unsere Unternehmung jede beliebige Menge zum Marktpreis verkaufen kann. Zur Vereinfachung normieren wir[96] $P - K = 1$. Nach diesen Überlegungen erhält man folgende Gewinnfunktion

$$h(x, u) = a\,x - \frac{1}{2}\,b\,x^2 - u - c\,u^2 \tag{4.4}$$

4.1.5 Problemformulierung

In der Formulierung der Optimalen Kontrolltheorie lautet unser Problem somit

[96] P ist der Marktpreis; K die (konstanten) Stückkosten.

$$\text{Maximize} \int_0^\infty \left(a\,x(t) - \frac{1}{2}\,b\,x(t)^2 - u(t) - c\,u(t)^2 \right) * e^{-rt}\,dt$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad \dot{x}(t) &= u(t) \\ x(t) &\geq 0 \\ x(0) &= x_0 \\ \\ \forall\, t &\geq 0 \end{aligned} \qquad (4.5)$$

Es soll im folgenden gelöst werden.

4.2 Problemlösung mithilfe des Maximum-Prinzips

Die Hamiltonfunktion für dieses Problem lautet

$$H(x, u, \lambda) = a\,x - \frac{1}{2}\,b\,x^2 - u - c\,u^2 + \lambda\,u \qquad (4.6)$$

Bedingung [#1] des Maximum-Prinzips liefert

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -1 - 2\,c\,u + \lambda = 0 \qquad (4.7)$$

woraus man

$$\lambda = 2\,c\,u + 1 \qquad (4.8)$$

erhält. Die Ableitung von (4.8) nach der Zeit ergibt

$$\dot{\lambda} = 2\,c\,\dot{u} \qquad (4.9)$$

Aus Bedingung [#2a] des Maximum-Prinzips ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$\dot{\lambda} = -a + b\,x + r\,\lambda \qquad (4.10)$$

nach Einsetzen von (4.8) und (4.9) in (4.10) erhält man

$$2\,c\,\dot{u} = -a + b\,x + r(2\,c\,u + 1) \qquad (4.11)$$

Mit Bedingung [#2b] des Maximum-Prinzips, hier

$$\dot{x} = u \qquad (4.12)$$

ergibt sich zunächst

$$\ddot{x} = \dot{u} \qquad (4.13)$$

und dann schliesslich durch Einsetzen von (4.12) und (4.13) in (4.11)

$$2c\ddot{x} = -a + bx + r2c\dot{x} + r \qquad (4.14)$$

Dies ist eine nicht-homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung. Man erkennt dies leichter durch Neuordnung der Terme

$$2c\ddot{x} - r2c\dot{x} - bx + a - r = 0 \qquad (4.15)$$

sowie Teilen durch 2 c

$$\ddot{x} - r\dot{x} - \frac{b}{2c}x + \frac{a-r}{2c} = 0 \qquad (4.16)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung löst das Dynamische Optimierungsproblem in (4.5). Gleichung (4.16) ist nicht allzu schwierig zu lösen. Die Lösungsidee besteht darin eine spezielle Lösung für die nicht-homogene Gleichung mit einer allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (also unter Nichtbeachtung des konstanten Terms) zu kombinieren. In diesem Fall kann man die Lösung aber noch weiter vereinfachen, indem man eine zusätzliche Information verwendet. Die Rede ist von der stationären Lösung wie in Kapitel 3.9 beschrieben. Die stationäre Lösung ist auch für sich allein gesehen interessant für die Analyse diese Problems und soll deshalb zunächst bestimmt werden.

Aus Formel (3.36) erhält man

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial x}\left(\hat{x}, 0\right)}{-\frac{\partial h}{\partial u}\left(\hat{x}, 0\right)} = a - b\hat{x} = r \qquad (4.17)$$

bzw. die stationäre Lösung des Kapitalstocks mit[97]

$$\hat{x} = \frac{a-r}{b} \qquad (4.18)$$

D.h., dass sich der Kapitalstock der Unternehmung langfristig an das Niveau (4.18) annähern wird.

Man kann nun den konstanten Term in (4.16) eliminieren, indem man im letzten Term der Gleichung (4.16) für r (4.17) einsetzt, also

$$\ddot{x} - r\dot{x} - \frac{b}{2c}x + \frac{a - \left(a - b\hat{x}\right)}{2c} = 0 \qquad (4.19)$$

Zusammenfassen der Terme ergibt

[97] Man beachte, dass eine positive stationäre Lösung nur für $a > r$ existiert. Für $a = r$ liegt die stationäre Lösung bei $x = 0$, und für $a < 0$ versucht das Problem eine negative stationäre Lösung anzunehmen, was aber durch die Restriktion der Zustandsvariable in (4.5) verhindert wird, denn Kapital kann nicht negativ sein. Eine Lösung existiert dann nicht.

Es wird deshalb an dieser Stelle vorausgesetzt, dass $a > r$ gilt.

$$\ddot{x} - r\dot{x} - \frac{b\left(x - \hat{x}\right)}{2c} = 0 \qquad (4.20)$$

Diese Gleichung kann nun in eine homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung umgewandelt werden, indem man eine kleine Variablentransformation vornimmt. Mit

$$y \equiv x - \hat{x} \qquad (4.21)$$

und daraus

$$\dot{y} = \dot{x} \qquad (4.22)$$

$$\ddot{y} = \ddot{x} \qquad (4.23)$$

erhält man für (4.20) die folgende Gleichung

$$\ddot{y} - r\dot{y} - \frac{b}{2c}y = 0 \qquad (4.24)$$

Ein gängiges Lösungskonzept für eine solche Gleichung hat die Form[98]

$$y(t) = y(0)\, e^{-\alpha t} \qquad (4.25)$$

Durch Einsetzen von (4.25) und den entsprechenden Ableitungen in (4.24) ergibt sich

$$\alpha^2 e^{-\alpha t} y(0) + \alpha r e^{-\alpha t} y(0) - \frac{b}{2c} e^{-\alpha t} y(0) = 0 \qquad (4.26)$$

Man kann diese Gleichung teilen durch[99]

$$y(0)\, e^{-\alpha t} > 0 \qquad (4.27)$$

Es ergibt sich somit die charakteristische Gleichung

$$\alpha^2 + \alpha r - \frac{b}{2c} = 0 \qquad (4.28)$$

Sie hat zwei Lösungen

$$\alpha = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{b}{2c}} \qquad (4.29)$$

von denen allerdings nur eine, nämlich die positive zu gebrauchen ist. Man erhält also für α

$$\alpha = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{b}{2c}} \qquad (4.30)$$

[98] Siehe: Simon and Blume, S.647-657.

[99] Es ist wichtig zu bemerken, dass y(0) im Allgemeinen nicht null ist. Wenn y(0) = 0 gilt, so bedeutet das wegen Definition (4.21), dass der anfängliche Kapitalstock x_0 zufälligerweise mit dem stationären Wert zusammenfällt. In diesem Fall ist eine Optimierung nicht mehr notwendig. Die optimale Politik besteht darin auf diesem Niveau zu verbleiben, indem man die Nettoinvestitionen für immer auf null setzt, also u(t) = 0; $\forall$ t.

Die Lösung der Form (4.25) mit α wie in (4.30) kann man rücktransformieren auf x

$$x - \hat{x} = \left(x(0) - \hat{x}\right) e^{-\alpha t} \tag{4.31}$$

und unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung in (4.5) ergibt sich die optimale Lösung des Kapitalstocks mit

$$x^*(t) = \hat{x} + \left(x_0 - \hat{x}\right) e^{-\alpha t} \tag{4.32}$$

Der optimale Investitionspfad folgt unmittelbar durch Verwenden von (4.12)

$$u^*(t) = -\alpha \left(x_0 - \hat{x}\right) e^{-\alpha t} \tag{4.33}$$

Man kann ferner den Pfad des Schattenpreises entlang der optimalen Lösung bestimmen, indem man (4.33) mit (4.8) kombiniert

$$\lambda^*(t) = -\alpha 2 c \left(x_0 - \hat{x}\right) e^{-\alpha t} + 1 \tag{4.34}$$

Der Vollständigkeit halber muss man noch prüfen, ob die Transversalitätsbedingung, [#3] erfüllt ist. Wir erhalten

$$\lim_{t \to \infty} \left(-\alpha 2 c \left(x_0 - \hat{x}\right) e^{-\alpha t} + 1\right) * \left(\hat{x} + \left(x_0 - \hat{x}\right) e^{-\alpha t}\right) * e^{-r t} = 0 \tag{4.35}$$

dies ist eine wahre Aussage und [#3] ist somit erfüllt.
Ferner kann man leicht zeigen, dass die Hamiltonfunktion in (4.6) konkav ist[100]. Das Maximum-Prinzip ist dadurch auch hinreichend und die Optimalität der Lösungen (4.32) - (4.34) ist somit bestätigt.

4.3 Grafische Darstellung der optimalen Lösung

Um die Lösung anschaulicher zu machen, werden die drei optimalen Pfade (4.32), (4.33) und (4.34) nachfolgend grafisch dargestellt[101].

[100] Siehe Kapitel 2.5.

[101] Für die Grafiken gelten folgende Parameterwerte: a = 10, b = 0.1, c = 0.1, r = 0.1, x_0 = 10, und aus diesen Werten dann über Formel (4.18) der stationäre Wert $\hat{x}$ = 99, sowie aus (4.30) α = 0.6588723.

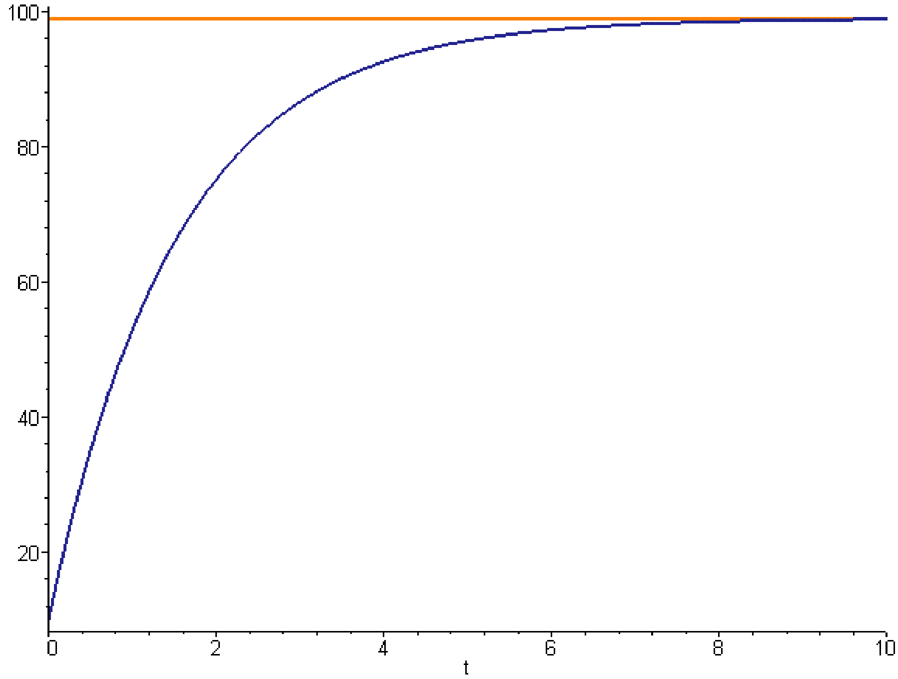

Abb. 10, Die Entwicklung des optimalen Kapitalstocks $x^*(t)$ über die Zeit, sowie das Niveau der stationären Lösung, eigene Darstellung

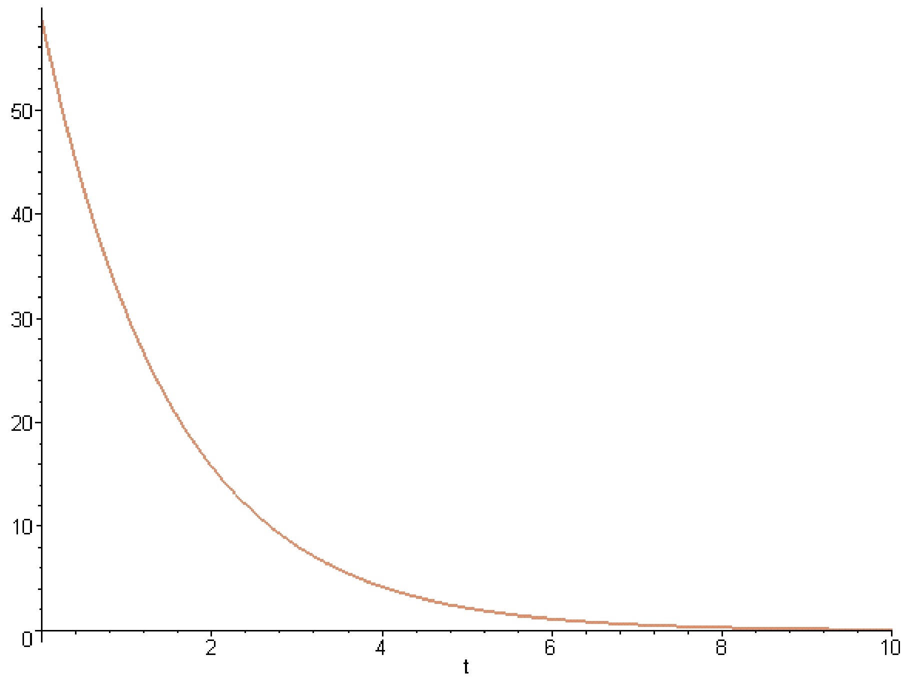

Abb. 11, Die Entwicklung der optimalen Nettoinvestition $u^*(t)$ über die Zeit, eigene Darstellung

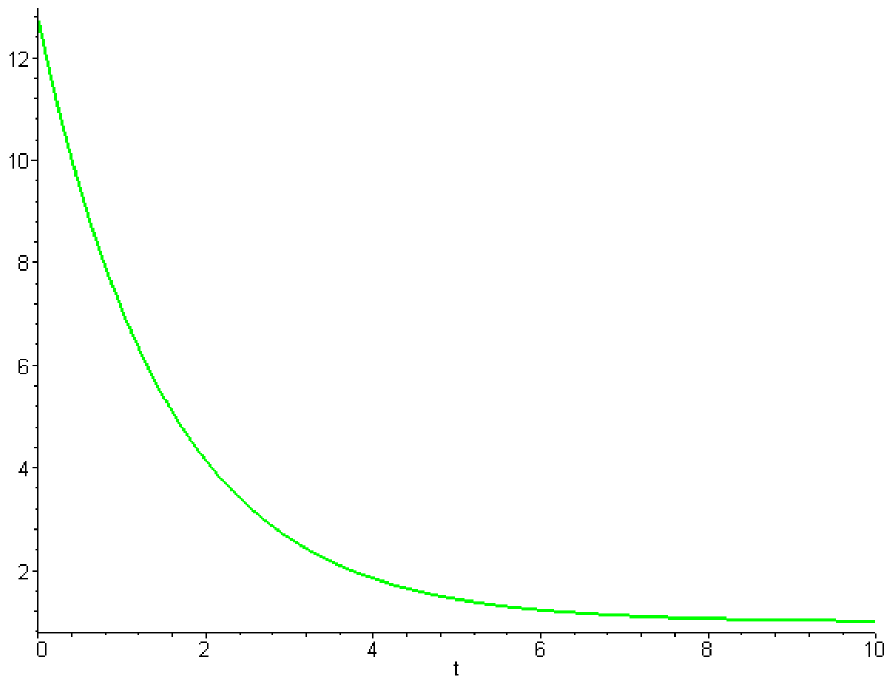

Abb. 12, Die Entwicklung des Pfades des Schattenpreises $\lambda^{*}(t)$ entlang der optimalen Lösung über die Zeit, eigene Darstellung

Interessant ist auch eine gemeinsame Betrachtung der drei Kurven.

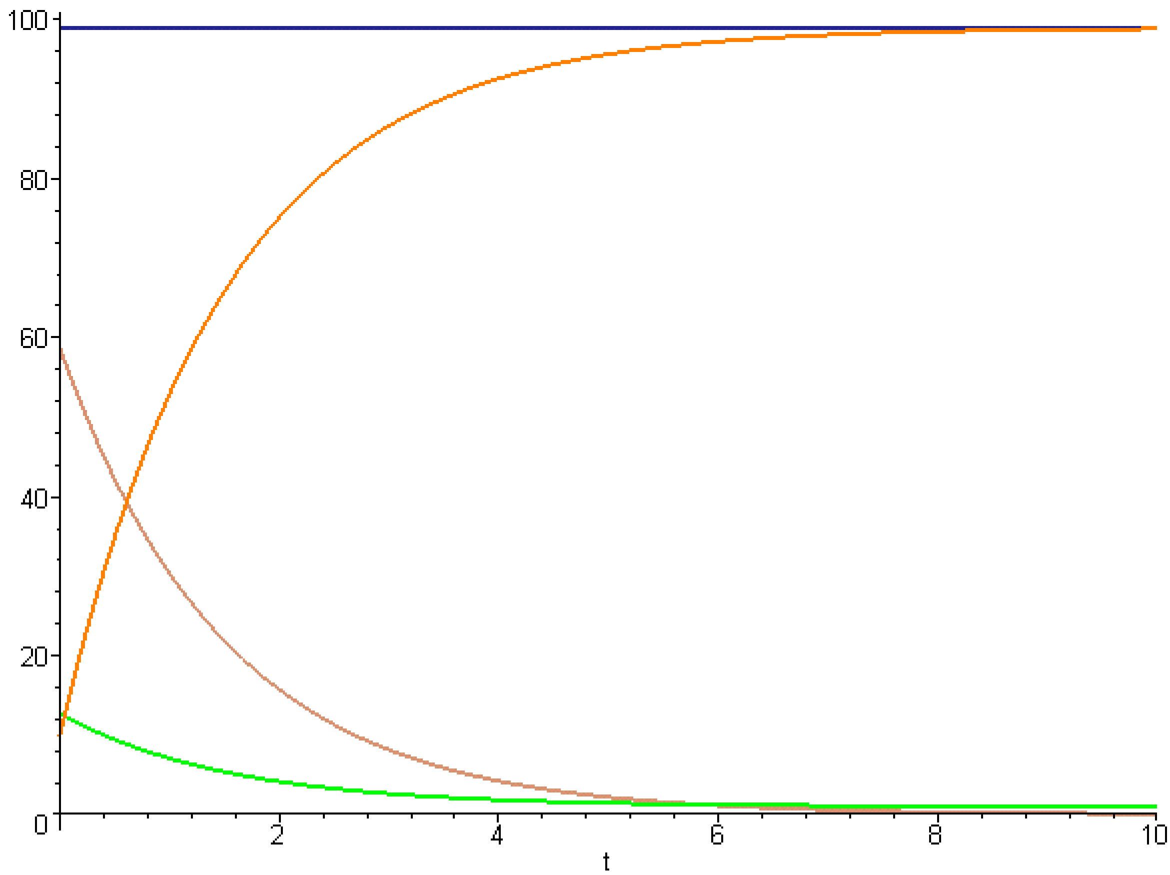

Abb. 13, Entwicklung der drei optimalen Pfade, sowie das Niveau der stationären Lösung, eigene Darstellung

Man sieht in Abb. 13 sehr schön wie sich der optimale Kapitalstock (die blaue Kurve) an das stationäre Niveau annähert. Gleichzeitig fallen die Kurven der Nettoinvestitionen (lila Kurve) und die des Schattenpreises (grüne Kurve). Dies ergibt Sinn: die Nettoinvestitionen werden immer geringer, weil sich der Kapitalstock immer näher an sein stationäres Niveau annähert und deshalb immer kleinere zusätzliche Einheiten an Kapital nötig sind, um dieses zu erreichen. Sie nähern sich an die x-Achse (also einem Wert von null) an, und erreichen diese sobald der Kapitalstock sein stationäres Niveau erreicht[102].

Ab diesem Punkt hat der Schattenpreis einen Wert von eins. Dies mag zunächst verwundern. Der Grund ist, dass er den Wert einer zusätzlichen Kapitaleinheit für die Unternehmung signalisiert. Sobald der Kapitalstock sein stationäres Niveau erreicht hat, wird zusätzliches Kapital keine zusätzliche Profitmöglichkeiten mehr bieten können, und hätte deshalb zunächst einen Wert von null. Man darf aber nicht ausser Acht lassen, dass die Unternehmung die zusätzliche Kapitaleinheit wieder verkaufen kann und dann einen Gewinn entsprechend des Marktpreises der Kapitaleinheit erzielt. Der Preis der Kapitaleinheiten wurde oben auf eins normiert, deshalb nun der Wert von eins für den Schattenpreis ab dem stationären Niveau.

4.4 Qualitative Analyse mithilfe eines Phasendiagramms

Ein Phasendiagramm stellt ein Differentialgleichungssystem grafisch dar. Kleine Richtungspfeile geben dabei an jedem Punkt der Grafik an wie sich das System im Zeitverlauf verhalten wird, wenn es ursprünglich an diesem Punkt startet. In der Optimalen Kontrolltheorie ist ein Phasendiagramm von Nutzen, um eine qualitative Einsicht in das Verhalten des Problems zu erhalten. Es wird hauptsächlich dann benutzt, wenn in einer Problemstellung die funktionalen Formen nicht genau spezifiziert werden können oder der Analyst dies vermeiden will, um seine Betrachtung allgemeiner zu halten[103]. Eine analytische Lösung ist in einem solchen Fall nicht möglich, aber durch das Studium des Phasendiagramms kann man in einer eine ‚Idee' der Lösung erhalten.

Im folgenden wird die Phasendiagrammanalyse auf unsere Problemstellung (4.5) angewandt.

---

[102] Strenggenommen werden in der gegebenen Formulierungen beide Kurven ihre Grenzwerte in endlicher Zeit nicht erreichen können. Allerdings wird die Differenz sehr schnell ausgesprochen klein (dies ist auch in den Grafiken zu sehen). Man kann also davon ausgehen, dass die Kurven ihre Grenzwerte relativ schnell erreichen, zumal in der Realität die Grössen dahinter, insbesondere der Kapitalstock nicht beliebig teilbar sind.

[103] Leonard and Long, S.137.

Die Bedingungen [#2a] und [#2b] bilden ein Differentialgleichungssystem mit

$$\dot{x} = u \tag{4.12}$$

$$\dot{\lambda} = -a + bx + r\lambda \tag{4.10}$$

Das u in (4.12) kann man ersetzen, indem man (4.8) umformt zu

$$u = \frac{\lambda - 1}{2c} \tag{4.36}$$

Man erhält dann

$$\dot{x} = \frac{\lambda - 1}{2c} \tag{4.37}$$

$$\dot{\lambda} = -a + bx + r\lambda \tag{4.38}$$

Das Phasendiagramm dieses Differentialgleichungssystems ist in nachfolgender Abbildung aufgeführt[104].

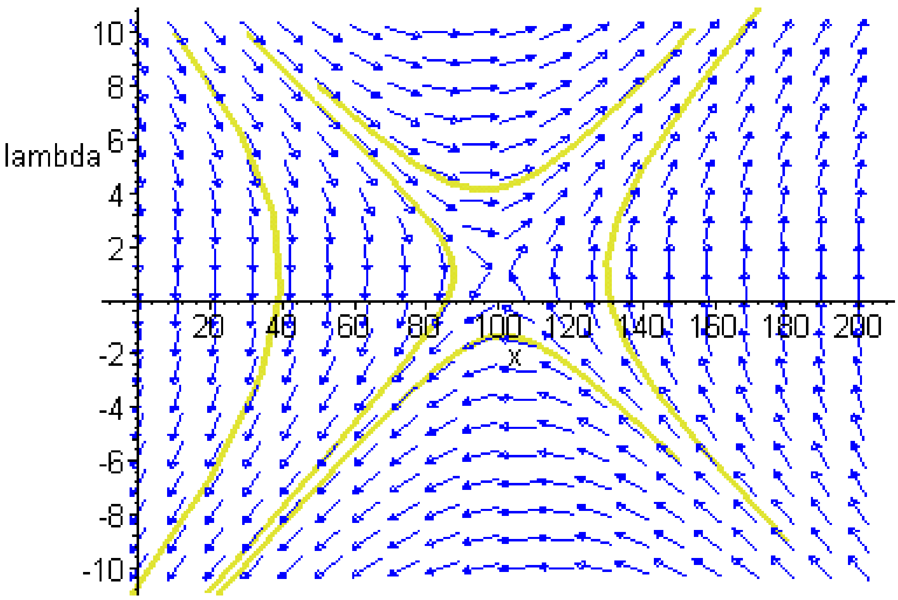

Abb. 14, Phasendiagramm der Zustands- und Kozustandsvariablen, eigene Darstellung

Die gelben Kurven stellen mögliche Kurvenverläufe dar. Wie man gut erkennen kann, liegt der Gleichgewichtspunkt bei x=99, $\lambda = 1$ – genau wie oben analytisch berechnet.

Es ist auch möglich ein Phasendiagramm für die Zustands- und die Kontrollvariable zu erstellen. Dazu setzt man (4.8) und (4.9) in (4.38) ein. Es ergibt sich

$$2c\dot{u} = -a + bx + r(2cu + 1) \tag{4.39}$$

bzw.

---

[104] Es gilt dabei wie oben a = 10, b = 0.1, c = 0.1, r = 0.1, und aus diesen Werten dann über Formel (4.18) der stationäre Wert $\hat{x}$ = 99, sowie aus (4.30) α = 0.6588723.

$$\dot{u} = \frac{r}{2c} - \frac{a}{2c} + \frac{b}{2c}x + r\,u \tag{4.40}$$

zusammen mit (4.12) haben wir also ein Differentialgleichungssystem in der Zustands- und Kontrollvariablen

$$\dot{x} = u \tag{4.41}$$

$$\dot{u} = \frac{r}{2c} - \frac{a}{2c} + \frac{b}{2c}x + r\,u \tag{4.42}$$

Das Phasendiagramm dazu sieht wie folgt aus:

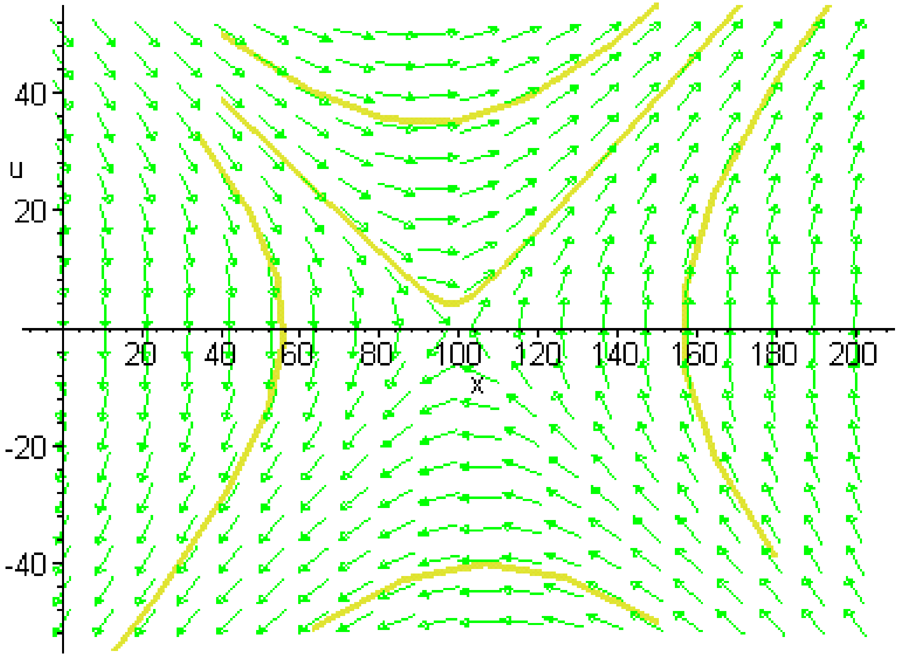

Abb. 15, Phasendiagramm der Zustands- und Kontrollvariablen, eigene Darstellung

Wie zu erwarten war finden wir das Gleichgewicht bei x = 99 und u = 0.

4.5 Sensitivitätsanalyse

In diesem Abschnitt soll eine kurze Sensitivitätsanalyse mittels komparativer Statik weitere Einsichten in das Verhalten des Fallbeispiels geben.
Untersucht wird wie sich die optimale Nettoinvestitionsfunktion verhält, wenn einzelne Parameter des Modells eine infinitesimale Änderung durchlaufen, unter Konstanthalten aller übrigen Parameter. Konkret werden Änderungen von r und x_0 behandelt. Die Nettoinvestitionsfunktion lautet

$$u^*(t) = -\alpha\left(x_0 - \hat{x}\right)e^{-\alpha t} \tag{4.33}$$

bzw. mit ausgeschriebenem α und Einsetzen von (4.18)

$$u^*(t) = \left(-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{b}{2c}}\right)\left(\frac{a-r}{b} - x_0\right) e^{\left(\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{b}{2c}}\right)t} \tag{4.43}$$

Diese Funktion nach ihren Parametern abzuleiten würde sehr unhandliche Resultate liefern. Um das zu vermeiden kann man (4.43) logarithmieren und dadurch vereinfachen[105] zu

$$\ln u^*(t) = \ln\left(-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{b}{2c}}\right) + \ln\left(\frac{a-r}{b} - x_0\right) + \left(\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{b}{2c}}\right)t \tag{4.44}$$

Wir betrachten hier nur den Fall[106]

$$\hat{x} > x_0 \tag{4.45}$$

Die Ableitungen lauten

$$\frac{\partial \ln u^*(t)}{\partial x_0} = -\frac{1}{\hat{x} - x_0} < 0 \tag{4.46}$$

und

$$\frac{\partial \ln u^*(t)}{\partial r} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{r}{\sqrt{r^2 + 2\frac{b}{c}}}}{-\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + 2\frac{b}{c}}} - \frac{1}{b\left(\hat{x} - x_0\right)} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{r}{\sqrt{r^2 + 2\frac{b}{c}}}\right)t \tag{4.47}$$

Die Interpretation für (4.46) ist offensichtlich. Mit steigendem x_0 nimmt die optimale Nettoinvestitionsfunktion ab. Der Grund dafür ist, dass mit einem höheren Anfangswert die stationäre Lösung schneller erreicht wird; es muss deshalb in jeder Periode ein kleinerer Teil investiert werden.

Bei (4.47) ist die Überlegung etwas schwieriger, weil sie von t abhängt. Für kleinere Werte von t wird (4.47) negativ sein. Für grössere Werte von t, dagegen, positiv. Man muss sich zunächst vor Augen führen, dass generell grosse Werte von r zu einer Präferenz der Gegenwart gegenüber der Zukunft führen, weil die Barwerte künftiger Gewinne sehr klein werden. Entsprechend bedeuten kleine Werte von r eine stärkere Gewichtung der Zukunft. Zudem wird das Problem heute gelöst, d.h. auch r steigt heute und nur heute. Wenn nun t klein und (4.47) deshalb negativ ist, so bedeutet dies, eine Abnahme der Nettoinvestitionen in der Gegenwart (also kleine Werte von t) bei steigendem r, denn die Gegenwart wird stärker gewichtet und hohe Nettoinvestitionen würden den heutigen Gewinn mindern. Ist jedoch t genügend gross und (4.47) deshalb positiv, so bedeutet dies, dass bei steigendem r die Nettoinvestitionen in der Zukunft steigen. Das ist eine Konsequenz aus dem soeben gesagten. Da

[105] Diese Transformation verfälscht die Ergebnisse nicht, da der Logarithmus eine monotone Transformation ist.

[106] Der andere Fall geht im Prinzip analog, erfordert allerdings einen Betrag im mittleren Term.

die Optimierer die Gegenwart höher bewerten, senken sie heute die Nettoinvestitionen und verschieben diese auf die Zukunft (also hohe Werte von t).

Damit ist die Untersuchung dieses Fallbeispiels abgeschlossen. Das folgende Kapitel geht kurz auf mögliche Modellerweiterungen ein und rekapituliert diese Arbeit in den Schlussfolgerungen.

5 Mögliche Erweiterungen und Konklusion

5.1 Einbezug von Unsicherheit

In der Realität sind die meisten ökonomischen Grössen dem Zufall unterworfen. Sei es die Entwicklung der Nachfrage, künftige Rohstoffpreise, der Wechselkurs etc., immer spielt die Unsicherheit eine wichtige Rolle in der Ökonomik. Die vorliegende Arbeit hat dies weitgehend ausgeklammert und sich auf ein deterministisches Modell beschränkt. Eigentlich nur bei der Bestimmung des Zinssatzes r mittels des CAPM wurde ein möglicher stochastischer Einfluss zugelassen, allerdings auch nur a priori.

In einer umfangreicheren Analyse als dies in diesem Rahmen möglich ist, kann auch die Unsicherheit explizit in der Optimalen Kontrolltheorie behandelt werden. Als wichtigstes Stichwort sei hier nur Ito's Lemma genannt, mit dessen Hilfe die Verbindung zwischen der Optimalen Kontrolltheorie und stochastischen Variablen hergestellt werden kann.

Will man allerdings in der Praxis ein Dynamisches Optimierungsproblem mit stochastischen Grössen lösen, so ist es ratsam, dazu die Dynamische Programmierung zu verwenden, da diese wesentlich besser geeignet ist mit Unsicherheit umzugehen.

5.2 Numerische Verfahren

Gerade in mehrdimensionalen Problemen und vor allem, wenn das Maximum-Prinzip nichtlineare Differentialgleichungen liefert, ist eine analytische Lösung in den meisten Fällen nicht mehr möglich. Man kann dann zur Lösung numerische Verfahren verwenden. Das gängigste Verfahren für Probleme mit unendlichem Zeithorizont stellt wohl das Rekursive Schiessen dar, dessen Grundidee darin besteht, den Wert der unspezifizierten Endbedingung zu ‚raten' und davon ausgehend zu versuchen, das Differentialgleichungssystem rückwärts zu lösen[107].

5.3 Konklusion

In den Wirtschaftswissenschaften stehen oft Dynamische Optimierungsprobleme im Vordergrund der Analyse bzw. sind ein wichtiges Hilfsmittel bei der ökonomischen Analyse. Man denke als Beispiel nur an die Profitmaximierung eines Unternehmens. Im Rahmen dieser Arbeit wurde mit der Optimalen Kontrolltheorie ein mathematisches Verfahren vorgestellt,

[107] Eine ausführlichere Darstellung ist in diesem Rahmen leider nicht möglich. Für Details siehe: Kenneth L. Judd, *Numerical Methods in Economics* (Cambridge, MA: The MIT Press, 1998), S. 350-362.

welches bestens geeignet ist ein Dynamisches Optimierungsproblem in den Wirtschaftswissenschaften zu lösen. Hierzu hat diese Arbeit die Optimale Kontrolltheorie in einen ökonomischen Rahmen eingebettet. Vor diesem Hintergrund wurde das zentrale Lösungsverfahren der Optimalen Kontrolltheorie, das Maximum-Prinzip, hergeleitet und ausführlich ökonomisch interpretiert. Allein dieser Teil ist ökonomisch interessant, weil er zeigt wie ein zunächst rein mathematisches Konzept eine direkte ökonomische Bedeutung erhält und somit verschiedene Denkansätze miteinander kombiniert.
Mit dem Fallbeispiel zur optimalen Investitionssteuerung eines Unternehmens wurde im folgenden ein wirtschaftswissenschaftliches Problem vorgestellt und mithilfe der erarbeiteten Lösungsmethode gelöst.
Neben allem Enthusiasmus über die Dynamische Optimierung in der vorgestellten Form, sollte man sich aber auch ihrer Unzulänglichkeiten bewusst sein. Eine Reihe von Annahmen und Simplifizierungen haben die Analyse vereinfacht, jedoch die Realitätsnähe gemindert.

Für eine ausführlichere und realistischere Auseinandersetzung mit dem Thema ist insbesondere ein Einbezug von stochastischen Grössen sowie die Vorstellung numerischer Verfahren nötig. Dadurch kann zum einen eine realistischere Problemdarstellung erreicht werden, und zum anderen eine grössere Anzahl von Problemen überhaupt erst erfasst werden. Vor diesem Hintergrund scheint dann auch eine ausführliche Behandlung der Dynamischen Programmierung ratsam.

Eine weitere sehr interessante Erweiterung besteht darin, die Dynamische Optimierung mit der Spieltheorie zu kombinieren, weil in vielen ökonomischen Problemen in der Realität eine Interaktion der Akteure besteht, die sonst nicht erfasst werden kann, aber u.U. essentiell für eine aussagekräftige Lösung ist.

Anhang

Anhang 1

Beweis für Bellmans Principle of Optimality[108].

Satz:

Gegeben sei ein dynamisches Optimierungsproblem mit

$$V(x, t_0, t_1) = \int_{t0}^{t1} f(x(t), u(t), t)\, dt$$

$$\text{mit } x(t_0) = x_{t0} \text{ und } x(t_1) = x_{t1} \qquad \text{(A1.1)}$$

das Integral sei additiv separierbar, und es gelte ferner $[a, b] \subset [t_0, t_1]$,
x^* sei der optimale Pfad im Intervall $[t_0, t_1]$.
Das Principle of Optimality besagt

Jeder Teil eines optimalen Pfades x^* ist ebenfalls optimal für das entsprechende Subproblem. (A1.2)

Beweis:

Beweis durch Widerspruch. Da x^* der optimale Pfad ist, gilt

$$V(x^*, t_0, t_1) \geq V(x, t_0, t_1) \qquad \text{(A1.3)}$$

Angenommen x^* ist optimal für das ganze Problem, aber nicht optimal für ein Subproblem, namentlich für das Intervall [a, b]. Dann gibt es einen anderen Pfad, z, der in diesem Intervall ein besseres Ergebnis liefert

$$V(z, a, b) > V(x^*, a, b) \qquad \text{(A1.4)}$$

Der neue optimale Weg von t_0 nach t_1, unter Verwendung des besseren Zwischenweges z von a nach b, und der additiven Separierbarkeit, lautet

$$V(x^*, t_0, a) + V(z, a, b) + V(x^*, b, t_1) > V(x^*, t_0, t_1) \qquad \text{(A1.5)}$$

Wir beschreiten nun den Pfad

$$x^*(t_0, a) \cup z(a, b) \cup x^*(b, t_1) \qquad \text{(A1.6)}$$

Dieser Pfad ist zulässig und hätte von Anfang an für das Gesamtproblem gewählt werden müssen, da er laut (A1.5) ein besseres Gesamtergebnis erzielt als x^*. Dies widerspricht der Annahme, dass x^* optimal für das Gesamtproblem ist.

□

[108] Brian Beavis and Ian M. Dobbs, S.240-243.

Anhang 2

Herleitung des stetigen Diskontierungsfaktors e^{-rt}.

Bei einmaligem Abzinsen pro Periode lautet die Diskontierungsformel

$$(1 + r)^{-t} \qquad \text{(A2.1)}$$

Wenn wir nun mehrmals, sagen wir n mal, pro Periode abzinsen, verändert sich dies zu

$$(1 + \frac{r}{n})^{-nt} \qquad \text{(A2.2)}$$

Wir interessieren uns für eine stetige Verzinsung, also eine Verzinsung zu jedem infinitesimalen Zeitpunkt innerhalb einer Periode. Dies entspricht

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{r}{n})^{-nt} \qquad \text{(A2.3)}$$

$$= \quad [\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{r}{n})^{n}]^{-t} \qquad \text{(A2.4)}$$

unter Verwendung der Formel für die Euler'sche Zahl e

$$\lim_{n\to\infty} (1+ \frac{x}{n})^{n} = e^{x} \qquad \text{(A2.5)}$$

erhält man für (A2.4) den Ausdruck

$$[e^{r}]^{-t} \qquad \text{(A2.6)}$$

und damit schliesslich das gesuchte Resultat

$$e^{-rt} \qquad \text{(A2.7)}$$

□

Anhang 3

Hier soll die Bedeutung der Konkavität in der Optimierung illustriert werden. Es wird für den zweidimensionalen Fall gezeigt, dass bei Konkavität ein lokales Maximum automatisch ein globales Maximum ist.

Satz:

Sei f (x, y) eine konkave Funktion, und die Menge S mit $(x, y) \in S$ konvex. Jedes lokale Maximum der Funktion f ist dann auch ein globales Maximum.

Beweis:

Beweis durch Widerspruch.

Angenommen (x_{lokal}, y_{lokal}) sei ein lokales Maximum von f, aber kein globales Maximum. Das heisst, es gibt ein anderes Element der Menge S, (x_{global}, y_{global}), welches das globale Maximum ist.

Es gilt

$$f(x_{global}, y_{global}) > f(x_{lokal}, y_{lokal}) \tag{A3.1}$$

Wenn wir nun eine Konvexkombination aus dem lokalen und dem globalen Maximum bilden, erhalten wir einen dritten Punkt: $(x_{konvex}, y_{konvex}) \in S$ mit

$$(x_{konvex}, y_{konvex}) = \lambda(x_{lokal}, y_{lokal}) + (1-\lambda)(x_{global}, y_{global}); \quad \lambda \in (0, 1) \tag{A3.2}$$

Da f konkav ist gilt mit (2.12)

$$f(x_{konvex}, y_{konvex}) \geq \lambda f(x_{lokal}, y_{lokal}) + (1-\lambda) f(x_{global}, y_{global}) \tag{A3.3}$$

daraus folgt, unter Verwendung von (A3.1)

$$\begin{aligned} f(x_{konvex}, y_{konvex}) &\geq \lambda f(x_{lokal}, y_{lokal}) + (1-\lambda) f(x_{global}, y_{global}) \\ &> \lambda f(x_{lokal}, y_{lokal}) + (1-\lambda) f(x_{lokal}, y_{lokal}) \\ &= f(x_{lokal}, y_{lokal}) \end{aligned} \tag{A3.4}$$

Es gilt also

$$f(x_{konvex}, y_{konvex}) > f(x_{lokal}, y_{lokal}) \tag{A3.5}$$

Wenn λ beliebig klein ist, so liegt (x_{konvex}, y_{konvex}) beliebig nahe an (x_{lokal}, y_{lokal}), auch so nahe, dass er inmitten der Punkte liegt, deren (lokales) Maximum (x_{lokal}, y_{lokal}) sein sollte. Dies ist ein Widerspruch zu (A3.5). Daraus folgt, dass (x_{lokal}, y_{lokal}) auch das globale Maximum sein muss, was den Satz beweist.

□

Anhang 4

Satz:

Wenn gelte[109]

$$f\,(x(t), u(t)) \equiv h\,(x(t), u(t)) * e^{-rt} \qquad \text{(A4.1)}$$

und f ausserdem konkav in x und u ist, also

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \leq 0 \qquad \forall \; x \in R \qquad \text{(A4.2)}$$

und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \leq 0 \qquad \forall \; u \in R \qquad \text{(A4.3)}$$

dann ist auch h konkav in x und u.

Beweis:

Es sei hier nur der Beweis für u erbracht. Der Beweis für x folgt analog.

Aus (A4.1) folgt nach zweimaligem Differenzieren nach u

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} * e^{-rt} \qquad \text{(A4.4)}$$

Wegen (A4.3) folgt daraus

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} * e^{-rt} \leq 0 \qquad \forall \; u, r, t \in R \qquad \text{(A4.5)}$$

Ferner gilt

$$e^{-rt} > 0 \qquad \forall \; u, r, t \in R \qquad \text{(A4.6)}$$

und deshalb schliesslich

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} \leq 0 \qquad \forall \; u \in R \qquad \text{(A4.7)}$$

was bedeutet, dass h konkav in u ist.

□

[109] Wir nehmen zusätzlich wie oben an, dass f (und damit auch h) C^2 in x und u sind.

Anhang 5

Herleitung der Formel zur Bestimmung der stationären Lösung unter Verwendung des Maximum-Prinzips.

Hinweis: die folgende Herleitung wird nur für den Fall g(x(t), u(t)) = u(t) gezeigt. Sie ist insbesondere dazu gedacht, eine Idee davon zu erhalten wie die einzelnen Konzepte miteinander verwoben sind.

Unter der Annahme

$$g(x(t), u(t)) = u(t) \tag{A5.1}$$

gilt für die Hamiltonfunktion

$$H\,(x(t), u(t), \lambda) \;=\; h\,(x(t), u(t)) + \lambda * u(t) \tag{A5.2}$$

In einem stationären Punkt gilt zum einen

$$\hat{u} \;=\; 0 \tag{A5.3}$$

und zum anderen ein konstantes x, nämlich

$$\hat{x} \tag{A5.4}$$

Aus (A5.3) und (A5.4) folgt, dass auch der Schattenpreis konstant sein muss[110], schliesslich ändert sich die stationäre Lösung nicht mehr, und es gibt somit für den Schattenpreis keinen Grund mehr durch eine Veränderung ein ‚Signal' zu geben inwiefern die optimale Lösung abgeändert werden kann. Es gilt deshalb

$$\dot{\hat{\lambda}} \;=\; 0 \tag{A5.5}$$

[#2a] des Maximum-Prinzips lautet an der stationären Stelle zunächst

$$-\,\frac{\partial H}{\partial x}\left(\hat{x},\; \hat{u}\right) + r\,\hat{\lambda} \;=\; \dot{\hat{\lambda}} \tag{A5.6}$$

Unter Verwendung von (A5.2), (A5.3) und (A5.5) vereinfacht sich dies zu

$$-\,\frac{\partial h}{\partial x}\left(\hat{x},\; 0\right) + r\,\hat{\lambda} \;= 0 \tag{A5.7}$$

bzw. zu

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial x}\left(\hat{x},\; 0\right)}{\hat{\lambda}} \;=\; r \tag{A5.8}$$

[110] Wir nehmen allerdings an, dass $\lambda > 0$ gilt. Dies macht auch ökonomisch gesehen Sinn, weil $\lambda = 0$ signalisieren würde, dass das Kapital keinen Wert mehr hat, was ja nicht der Fall ist.

Bedingung [#1] des Maximum-Prinzips lautet an der stationären Stelle

$$\frac{\partial H}{\partial u}\left(\hat{x},\ \hat{u}\right) = 0 \tag{A5.9}$$

Unter Verwendung von (A5.2) und (A5.3) vereinfacht sich dies zu

$$\frac{\partial h}{\partial u}\left(\hat{x},\ 0\right) + \hat{\lambda} = 0 \tag{A5.10}$$

dies ist äquivalent zu

$$\hat{\lambda} = -\frac{\partial h}{\partial u}\left(\hat{x},\ 0\right) \tag{A5.11}$$

Kombiniert man nun schliesslich Gleichungen (A5.8) und (A5.11), erhält man

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial x}\left(\hat{x},\ 0\right)}{-\frac{\partial h}{\partial u}\left(\hat{x},\ 0\right)} = r \tag{A5.12}$$

was der gesuchten Formel entspricht.

□

Literaturverzeichnis

Abell, Martha L. and James P. Braselton. *Differential Equations with Mathematica*, 2nd ed. New York: Academic Press, 1997.

Beavis, Brian and Ian M. Dobbs. *Optimization and Stability Theory for Economic Analysis*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1990.

Bellman, Richard. *Dynamic Programming*. Princeton: Princeton University Press, 1957.

Bertsekas, Dimitri P. *Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models*. Englewood Cliffs, USA: Prentice Hall, 1987.

Brealey, Richard A. and Stewart C. Myers. *Capital Investment and Valuation*. New York: McGraw-Hill, 2003.

Cass, David and Karl Shell, Eds. *The Hamiltonian Approach to Dynamic Economics*. New York: Academic Press, 1976.

Chiang, Alpha C. *Elements of Dynamic Optimization*. Long Grove, IL: Waveland Press, 2000.

Carlson, D.A., A.B. Haurie and A. Leizarowitz. *Infinite Horizon Optimal Control. Deterministic and Stochastic Systems*, 2nd ed. Berlin: Springer, 1991.

Copeland, Thomas E., J. Fred Weston and Kuldeep Shastri. *Financial Theory and Corporate Policy*, 4th ed. New York: Pearson Addison Wesley: 2005.

Dixit, Avinash K. *Optimization in Economic Theory*. 2nd ed. New York: Oxford University Press, 1990.

Dorfman, Robert. „An Economic Interpretation of Optimal Control Theory," *The American Economic Review* 59 (1969): S.817-831.

Dreyfus, Stuart. „Richard Bellman on the Birth of Dynamic Programming," *Operations Research* 50. No .1 (2002), S.48-51.

Elster, Karl-Heinz. *Modern Mathematical Methods of Optimization*. Berlin: Akademie Verlag, 1993.

Feichtinger, Gustav und Richard F. Hartl. *Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse: Anwendungen des Maximumprinzips in den Wirtschaftswissenschaften*. Berlin: Walter de Gruyter Verlag, 1986.

Gärtner, Manfred. *Macroeconomics*. London: Pearson: 2003.

Intriligator, Michael D. *Mathematical Optimization and Economic Theory*. Englewood Cliffs, USA: Prentice-Hall, 1971.

Judd, Kenneth L. *Numerical Methods in Economics*. Cambridge, MA: The MIT Press, 1998.

Kendrik, David. *Control Theory with Applications to Economics*, in Kenneth J. Arrow and Michael D. Intriligator, eds., Handbook of Mathematical Economics, Volume I, Chapter 4, S.111-158. New York: North-Holland Publishing: 1981.

Kort, Peter M. *Optimal Dynamic Investment Policies of a Value Maximizing Firm*. Berlin: Springer, 1989.

Leonard, Daniel and Ngo van Long. *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1992.

Müller, Heinz. *Mathematische Grundlagen der Ökonomie*, Vorlesungsunterlagen WS 2003/2004. St.Gallen, 2003.

Mukul, Majumdar, Tapan Mitra and Kazuo Nishimura, Eds. *Optimization and Chaos*. Springer: Berlin, 2000.

Neftci, Salih N. *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, 2nd ed. London: Academic Press, 2000.

Romer, David. *Advanced Macroeconomics*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 2001.

Simon, Carl P. and Lawrence Blume. *Mathematics for Economists*. New York: W.W.

Norton, 1994.

Weitzman, Martin L. *Income, Wealth, and the Maximum Principle*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 2003.

Wolfram, Stephen. *The Mathematica Book*, 4th ed. Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999.

Varian, Hal R. *Grundzüge der Mikroökonomik*, 6. Auflage. München: Oldenbourg Verlag, 2003.

Eigenständigkeitserklärung

Ich erkläre hiermit,

- dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Verwendung anderer als der angegebenen Hilfsmittel verfasst habe,
- dass ich sämtliche verwendeten Quellen erwähnt und gemäss gängigen wissenschaftlichen Zitierregeln korrekt zitiert habe,
- dass ich ohne schriftliche Zustimmung des Rektors keine Kopien dieser Arbeit an Dritte aushändigen werde, ausgenommen nach Abschluss des Verfahrens an Studienkollegen und -kolleginnen oder an Personen, die mir wesentliche Informationen für die Bachelor-Arbeit zur Verfügung gestellt haben.

Benedikt Emanuel Maissenhälter Mosbach, den 13.06.2005