Anwendungen der linearen Programmierung

BACHELOR-ARBEIT

Referent

Prof. Dr. Karl Frauendorfer

vorgelegt von

Simon Wehrmüller

Universität St. Gallen –

Hochschule für Wirtschafts-,

Rechts- und Sozialwissenschaften (HSG)

St. Gallen, 14. Juni 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

> The observation that a number of military, economic, and industrial problems can be expressed (or reasonably approximated) by mathematical systems of linear inequalities and equations has helped give rise to the development of linear programming.[1]

Wirtschaftliches Agieren geschieht immer in einer Umgebung beschränkter Ressourcen. Die lineare Programmierung bildet Problemstellungen in linearen Gleichungen und Ungleichungen ab, aus welchen mit verschiedenen Verfahren optimale Verhaltensstrategien gewonnen werden können. Ohse definiert die lineare Programmierung formal als Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen. Die Zielfunktion, die es zu maximieren oder zu minimieren gilt, ist eine lineare Gleichung. Die Nebenbedingungen sind Gleichungen oder Ungleichungen vom Typ $\leq$ oder $\geq$. Sämtliche Variablen sind kontinuierlich und nicht-negativ.[2]

Die vorliegende Arbeit soll einen Einblick gewähren in verschiedene betriebswirtschaftliche Anwendungsmöglichkeiten der linearen Programmierung.

Für das Verständnis des Textes sind keine speziellen mathematischen Kenntnisse notwendig. Vielmehr soll ein betriebswirtschaftliches Grundverständnis auf eine Auswahl quantitativer Beispiele angewendet werden. Ziel ist dabei immer wieder, einerseits optimale Lösungen in einem restringierten Problem zu finden, andererseits aber auch so genannte Schattenpreise der einzelnen Restriktionen zu bestimmen, um Empfehlungen bezüglich der Lockerung von Restriktionen abgeben zu können. Solche Empfehlungen könnten etwa darauf abzielen, interne Beschränkungen anzupassen oder neue Ressourcen wie Arbeitskräfte oder Kapital zuzukaufen.

Anhand eines einfachen Beispiels werden in einem ersten Teil die mathematischen Grundlagen erworben, um aus einer betriebswirtschaftlichen Problemstellung ein System aus linearen Gleichungen und Ungleichungen zu gewinnen. Dann werden Kriterien erarbeitet, um zu prüfen, ob eine Lösung dieses Systems optimal ist. Ein Verfahren, das solche Lösungen generiert, ist die Simplex-Methode. Es ist wichtig, diese Methode konzeptionell zu verstehen, auch wenn in der Praxis auf rechnergestützte Methoden zurückgegriffen wird (die ihrerseits teilweise auf die Simplex-Methode Regress nehmen). Schliesslich werden die optimalen Lösungen so genannten Dualanalysen unterzogen.

Es kann nicht Ziel sein, sämtliche Erkenntnisse aus streng mathematischen Beweisen zu erlangen. Wo solche als zu lange erscheinen, werden sie nicht aufgeführt. Allenfalls

[1] Dantzig, 1963, S. 2.
[2] Ohse, 1998, S. 127.

werden für eine eingehendere Behandlung Literaturhinweise gemacht.

In einem nächsten Teil werden vier verschiedene Anwendungstypen – basierend auf den gewonnenen Erkenntnissen – besprochen. Die Berechnung der optimalen Lösung geschieht dabei rechnergestützt mit Hilfe des „General Algebraic Modeling Systems (GAMS)“. Die betreffenden Programme sind im Anhang aufgeführt.

Diese Arbeit basiert auf der Vorlesung „Quantitative Entscheidungs- und Planungsmodelle“ und auf den gleichnamigen Vorlesungsunterlagen (Ausgabe 2002/2003) von Prof. Dr. Karl Frauendorfer, IfU – Institut für Unternehmensforschung (Operations Research), Universität St. Gallen (HSG), sowie auf dem Buch „Operations Research“ von Wayne L. Winston.[3]

[3] Winston, 1994.

2 Grundlagen

Zentrale Begriffe und Algorithmen sollen anhand eines einfachen Beispiels eingeführt werden. Dazu die folgende Ausgangslage: Ein privater Anleger sieht sich für die Anlage seines Vermögens folgenden Möglichkeiten gegenüber. Er kann sein Geld einerseits in Form von Callgeld (kündbar innert 48 Stunden), andererseits als Festgeld (Laufzeit: 1 Jahr) anlegen. Sein gesamtes Vermögen beträgt E. Für sein Geld erhält er folgende Zinsen.

Callgeld:	r_c
Festgeld:	r_f

Hält er einen Teil seines Vermögens als Bargeld, so bekommt er dafür keinen Zins. Um kurzfristigen Verbindlichkeiten nachzukommen, hält der Anleger einen Mindestbetrag $x_{liquid} \leq E$ in Form von Callgeld oder Bargeld. Unter diesen Voraussetzungen möchte der Anleger seinen Zinsertrag maximieren.[4]

2.1 Entscheidungsstrukturen

Der Anleger kann sein Geld also in Callgeld und Festgeld anlegen. x_c bezeichne die Anzahl Einheiten an Callgeld und x_f die Einheiten Festgeld. x_c und x_f sind die **Entscheidungsvariablen** des Systems.

n verschiedene Handlungsalternativen spannen einen n-dimensionalen **Entscheidungsraum** auf. In unserem Beispiel besteht die Auswahl zwischen x_c und x_f. Daher gilt $n = 2$. Somit liegt ein 2-dimensionaler Entscheidungsraum (also eine Entscheidungsebene) vor, was bedeutet, dass sich die Strukturen in einem ebenen Diagramm darstellen lassen. Die Variablen x_c und x_f können nicht beliebige Werte annehmen. Es bestehen für sie bestimmte **Restriktionen**. Der Investor verfügt über ein Vermögen von E. Seine Anlagen in Callgeld und Festgeld dürfen also zusammen seine Ersparnisse nicht übersteigen. Da neben der Investition noch die Möglichkeit der Barhaltung besteht, kann die Summe jedoch kleiner sein. Man erhält für die erste Bedingung, die so genannte Budgetrestriktion.

$$x_c + x_f \leq E \tag{1}$$

Weiter möchte der Anleger über eine gewisse kurzfristige Liquidität verfügen. Bargeld und Callgeld müssen daher zusammen mindestens x_{liquid} entsprechen. Da für den Investor gemäss Aufgabenstellung nur die drei möglichen Anlagetypen Bargeld, Callgeld

[4] Die Lösung dieses Problems ist äusserst trivial und bedarf eigentlich nicht der Methoden der linearen Programmierung. An dieser Stelle interessiert jedoch nicht das Resultat, sondern der Weg.

und Festgeld bestehen, folgt:

$$x_f \leq E - x_{liquid} \tag{2}$$

Als weitere Bedingung kommt hinzu, dass es dem Anleger nicht erlaubt sein soll, Gelder aufzunehmen, er kann also keine Short-Positionen eingehen. Diese Restriktion äussert sich in den so genannten **Nicht-Negativitäts-Bedingungen** für die Entscheidungsvariablen.

$$x_c \geq 0 \tag{3}$$

$$x_f \geq 0 \tag{4}$$

Ersetzt man die Ungleichheitszeichen in den Ungleichungen (1) - (4) durch Gleichheitszeichen, erhält man vier **Niveaumengen**.

$$x_c + x_f = E \tag{5}$$

$$x_f = E - x_{liquid} \tag{6}$$

$$x_c = 0 \tag{7}$$

$$x_f = 0 \tag{8}$$

Im vorliegenden zweidimensionalen Fall entspricht jede dieser Gleichungen einer Geraden. Die Niveaumengen werden daher auch Niveaulinien genannt. Eine Niveaulinie teilt die Entscheidungsebene in zwei Halbebenen. Im allgemeinen, mehrdimensionalen Fall teilt eine $(n-1)$-dimensionale Niveaumenge den n-dimensionalen Entscheidungsraum in zwei n-dimensionale Halbräume.

Folgende Annahmen werden getroffen für das Vermögen E und die minimalen liquiden Mittel x_{liquid}:

$$\begin{aligned} E &= 10 \\ x_{liquid} &= 2 \end{aligned}$$

In Abbildung 1 sind die Niveaulinien aus den Gleichungen (5) - (8) eingetragen. Die Linien bilden ein Viereck. Mittels Einsetzen von Punkten in die entsprechende Ungleichung (vgl. Ungleichungen (1) - (4)), erkennt man, welche Punkte zulässig sind. Es sind dies sämtliche Punkte im Inneren des Vierecks. Die Menge der zulässigen Strategien ist beschränkt. [5]

[5] Trotzdem gibt es für kontinuierliche Entscheidungsvariablen unendlich viele Lösungen.

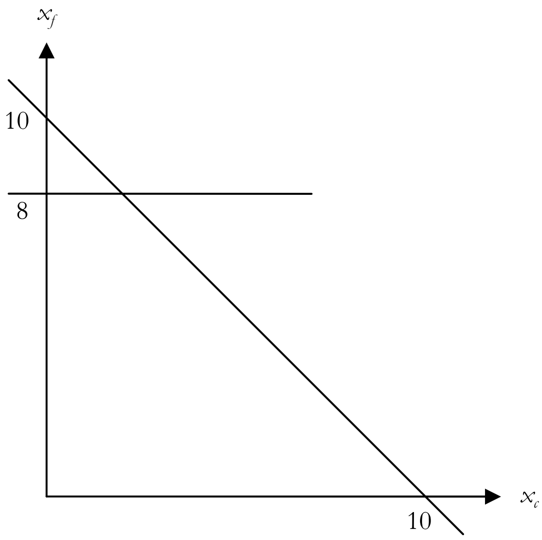

Abbildung 1

Die Art von Restriktionensystem, wie es sich aus den Ungleichungen (1) - (4) ergibt, ist charakteristisch für Problemstellungen der linearen Programmierung. In Matrix-Schreibweise lassen sich solche Probleme folgendermassen beschreiben:

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{9}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist eine $m \times n$-Matrix. x ist ein n-dimensionaler Vektor und b ist ein m-dimensionaler Vektor. m ist die Anzahl der Ungleichungen, die das System restringieren (ohne die Nicht-Negativitäts-Bedingungen). n steht für die Anzahl Entscheidungsvariablen. Für unser Beispiel gilt: $m = n = 2$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_c \\ x_f \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$b = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Die zulässige Menge, wie sie in Abbildung 1 eingetragen ist, ist immer konvex. Dies bedeutet, die Strecke zwischen zwei beliebigen Punkten, welche Element dieser Menge sind, verläuft vollständig innerhalb der Menge.[6]

[6] Zum Begriff der konvexen Menge und einer mathematischen Definition derselben, vgl. Winston, 1994, S. 60 und 652ff.

2.2 Zielfunktion

Nachdem die Menge der zulässigen Strategien bekannt ist, gilt es diese zu bewerten. Die Bewertung geschieht mittels der Zielfunktion. Allgemein lautet diese:

$$f(x) = c' \cdot x \tag{13}$$

Die Zielfunktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bildet den n-dimensionalen Raum auf den (eindimensionalen) Zahlenstrahl ab. c ist ein n-dimensionaler Vektor. $f(x)$ ist zu maximieren ($f(x)$ stellt in diesem Fall typischerweise eine Ertragsfunktion dar) beziehungsweise zu minimieren ($f(x)$ ist in diesem Fall meist eine Kostenfunktion). Im Beispiel des Anlegers gilt es, den Zinsertrag zu maximieren. Die Zielfunktion ist

$$f(x) = c' \cdot x = r' \cdot x = (r_c, r_f) \cdot \begin{pmatrix} x_c \\ x_f \end{pmatrix} \tag{14}$$

oder in Funktionsschreibweise

$$f(x) = r_c \cdot x_c + r_f \cdot x_f \tag{15}$$

Der Vektor x heisst **Entscheidungsvektor**. Für ihn gilt es, die optimalen Werte zu finden, das heisst die Werte, welche die Funktion $f(x)$ maximieren.

Für den Anleger gelten folgende Zinssätze:

$$\begin{aligned} r_c &= 0.02 \\ r_f &= 0.04 \end{aligned}$$

Dies führt zu der Zielfunktion

$$f(x) = 0.02x_c + 0.04x_f \tag{16}$$

Fixiert man den Zielfunktionswert auf einen bestimmten Wert, so resultieren Niveaumengen (Geraden) in der Entscheidungsebene. In der Abbildung 2 sind ebensolche Niveaumengen eingetragen.

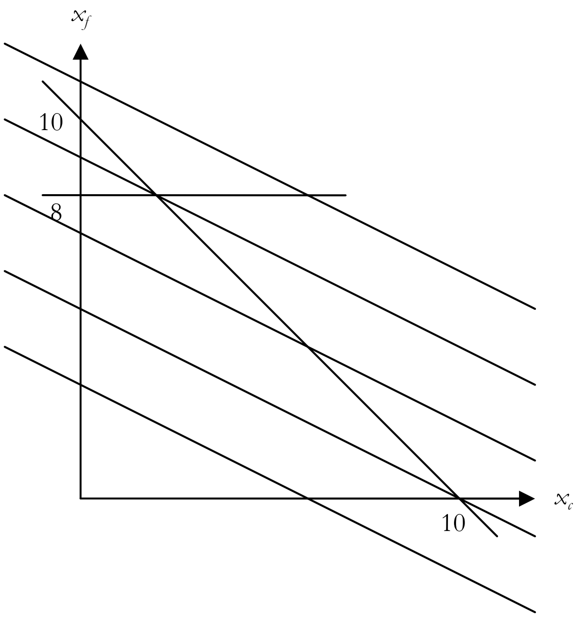

Abbildung 2

Dank dieser Niveaumengen ist es bereits jetzt möglich, die optimale Kombination von Callgeld und Festgeld zu bestimmen. Im nächsten Abschnitt soll der grafischen Bestimmung der optimalen Lösung eine analytische folgen.

2.3 Optimalwertkriterien

Oben wurden das Restriktionensystem und die Zielfunktion definiert. Durch diese ist die Optimierungsaufgabe – hier ein Maximierungsproblem – vollständig bestimmt.

$$\begin{aligned} \max c' \cdot x & & \\ A \cdot x &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{17}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

In diesem Abschnitt wird es nun darum gehen, aus den zulässigen Lösungen diejenige zu selektieren, die den optimalen, das heisst den maximalen beziehungsweise minimalen, Zielfunktionswert hat. Dazu ist das Konzept des **Gradienten** notwendig. Der Gradient steht senkrecht auf der Niveaumenge einer Funktion und bestimmt die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion vom betreffenden Punkt aus. In unserem Kontext ist der Gradient der Zielfunktion von Interesse. Er bestimmt die Richtung der stärksten Zunahme des Zinsertrags. Der Gradient lässt sich relativ einfach aus der linearen Zielfunktion berechnen. Lautet die Zielfunktion

$$f(x) = c' \cdot x \tag{18}$$

so lautet der Gradient

$$\nabla = c \tag{19}$$

Neben der Richtung des stärksten Anstiegs gibt der Gradient auch die Stärke des Anstiegs an. Letztere entspricht dem Betrag des Gradienten, also der Länge des Vektors.

Der Investor aus unserem Beispiel sieht sich dem Gradienten

$$\nabla = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.04 \end{pmatrix} \tag{20}$$

gegenüber. In Abbildung 3 ist der Gradient abgetragen. Man erkennt leicht, dass ein Verschieben der Zielfunktion in eine Richtung, die mit dem Gradienten einen Winkel kleiner als 90 Grad einschliesst, zu einem Anstieg der Zielfunktion führt. Wird die Zielfunktion in eine Richtung verschoben, die mit dem Gradienten einen stumpfen Winkel einschliesst, so nimmt der Zielfunktionswert ab. Diese Erkenntnis ist zentral für die zu behandelnden Optimalitätskriterien. Die Optimalitätskriterien geben Bedingungen an, unter welchen eine gültige Lösung des Optimierungsproblems die optimale Lösung darstellt.

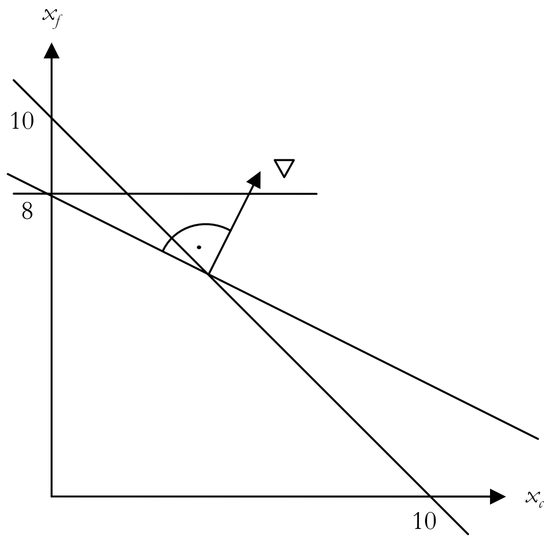

Abbildung 3

2.3.1 Optimalitätskriterium aus primaler Sicht

Um abzuklären, ob es sich bei einer bestimmten Strategie, also einer bestimmten Auswahl der Entscheidungsvariablen, um die optimale handelt, schaut man, ob vom entsprechenden Punkt aus die Möglichkeit besteht, die Niveaulinie der Zielfunktion in Richtung des Gradienten zu verschieben, ohne dabei eine Restriktion zu verletzen. Im Falle von Abbildung 4 ist dies der Fall. Der Punkt ist also nicht optimal. Der Gradient der Zielfunktion und die Budgetgerade ($x_c + x_f = 10$) schliessen einen Winkel ein, der kleiner als 90 Grad ist. Man kann sich daher auf der Budgetgeraden Richtung Nord-West bewegen. Dabei vergrössert sich der Zielfunktionswert. Betrachten wir nun die Abbildung 5. Hier kann man sich nicht mehr in einem Winkel kleiner 90 Grad zum Gradienten bewegen, ohne eine Restriktion zu verletzen. Es besteht keine zulässige Anstiegsrichtung mehr. Sämtliches zulässiges Verschieben der Zielfunktion führt zu einer Verringerung des Zielfunktionswerts. Der Punkt $(x_c, x_f) = (2, 8)$ ist optimal.

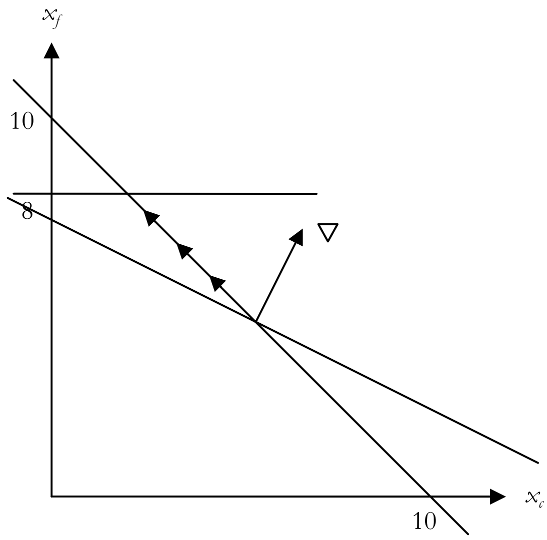

Abbildung 4

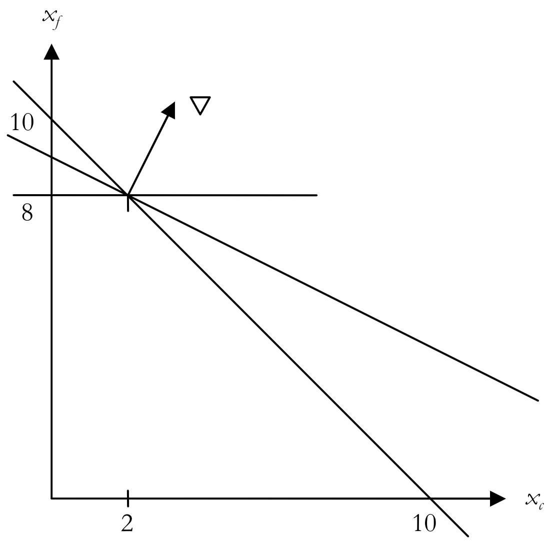

Abbildung 5

Aus den Abbildungen 4 und 5 ist auch ersichtlich, dass als optimale Strategie keine Strategie in Frage kommt, die nicht am Rand der zulässigen Menge liegt, bei der also nicht mindestens eine Ressource voll ausgeschöpft wird. Es ist denkbar, dass eine ganze Kante Lösung eines Problems ist, dann nämlich, wenn die Niveaulinien der Zielfunktion parallel zur betreffenden Kante verlaufen. Lösungen sind dann aber auch die betreffenden Ecken. Generell lässt sich sagen, dass immer (mindestens) eine Ecke optimale Lösung eines linearen Programms ist.

Das Optimalitätskriterium aus primaler Sicht besagt, dass eine Strategie genau dann optimal ist, wenn es keine zulässige Anstiegsrichtung mehr gibt.

Mittels der so genannten Simplex-Methode wird es möglich sein, die optimale Lösung eines linearen Programms zu berechnen. Dies ist insbesondere von Nutzen, wenn es gilt, Problemstellungen mit mehrdimensionalen Entscheidungsvektoren zu lösen. Der Algorithmus der Simplex-Methode stützt sich auf das primale Optimalitätskriterium. Von einer zulässigen Lösung, also einem Eckpunkt ausgehend werden, zulässige Anstiegsrichtungen gesucht. Existieren solche, wird heuristisch eine ausgewählt und die neue zulässige Lösung auf weitere Anstiegsrichtungen untersucht, bis das Verfahren in der optimalen Lösung endet.

2.3.2 Optimalitätskriterium aus dualer Sicht

Das Optimalitätskriterium aus dualer Sicht besagt, dass eine Strategie genau dann optimal ist, wenn der Gradient der Zielfunktion an dieser Stelle innerhalb des Normalenkegels liegt. Der Normalenkegel ist durch die Richtungen der nicht-negativen Linearkombinationen der Gradienten der aktiven Restriktionen bestimmt. Aktiv ist eine Restriktion, wenn die Ressource, die sie verkörpert, vollständig ausgeschöpft ist, oder anders ausgedrückt, wenn sich die aktuelle Strategie auf der Gerade befindet, die die betreffende Ressource begrenzt. Linearkombinationen entstehen durch Addition von Vielfachen der Gradienten. In der Strategie in Abbildung 6 sind die Restriktionen „Callgeld und Festgeld dürfen zusammen das Vermögen nicht Übersteigen“ und „Investiere maximal das Vermögen abzüglich der minimalen Liquiditätshaltung in Festgeld“ aktiv. Der Normalenkegel in diesem Punkt ist durch die folgende Gleichung gegeben:

$$n = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

mit $\alpha, \beta \geq 0$. In Abbildung 6 ist der Normalenkegel schattiert.

Der Gradient der Zielfunktion ist

$$\nabla = c = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.04 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Setzt man $\alpha = \beta = 0.02$, so erhält man $n = \nabla$. Da α und β dabei positiv sind, handelt es sich um eine nicht-negative Linearkombination. Die gewählte Strategie ist also optimal. Der Gradient liegt im Nomalenkegel.

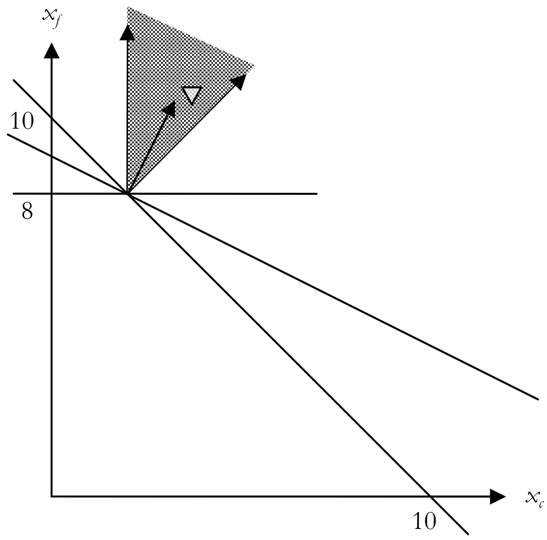

Abbildung 6

Im Folgenden soll die Äquivalenz des primalen und des dualen Optimalitätskriteriums gezeigt werden. Vom primalen Kriterium wissen wir, dass eine Strategie optimal ist, wenn es von dieser aus keine zulässige Anstiegs-Richtung mehr gibt. Oder anders ausgedrückt, wenn bloss noch Abstiegsrichtungen existieren. Für Abstiegsrichtungen ist charakteristisch, dass sie mit dem Gradienten der Zielfunktion einen Winkel von mehr als 90 Grad einschliessen. Um dem dualen Optimalitätskriterium zu genügen, muss der Gradient der Zielfunktion im Normalenkegel der für die Strategie aktiven Restriktionen liegen. Dies ist gleichbedeutend damit, dass der Gradient mit allen aktiven Restriktionen einen Winkel grösser als 90 Grad einschliesst, wie aus Abbildung 6 leicht ersichtlich ist. Damit ist das primale Optimalitätskriterium genau dann erfüllt, wenn das duale erfüllt ist und vice versa.

2.4 Simplex-Methode

In diesem Abschnitt wird die Simplex-Methode vorgestellt. Sie ist ein Verfahren, mit welchem es möglich ist, basierend auf dem primalen Optimalitätskriterium, die optimale Lösung eines linearen Programms zu bestimmen. Der zugehörige Algorithmus bedarf – abhängig von der Anzahl Restriktionen und Entscheidungsvariablen – oftmals vieler Iterationen bis zur optimalen Lösung. Es gibt daher viele rechnergestützte Programme, die die Ausführung dieses Algorithmus übernehmen. Im Folgenden soll die Simplex-Methode nicht bis ins Detail erläutert werden. Es geht vielmehr darum, eine Idee von ihrer Funktionsweise zu erhalten. Für eine umfassendere Behandlung der Problematik vgl. das Buch von Winston[7], aus welchem auch das in diesem Abschnitt behandelte Beispiel stammt.

Vor der Behandlung der eigentlichen Methode sind einige Begriffsdefinitionen notwendig.

In der **Standardform** enthält das lineare Programm keine Ungleichungen, sondern besteht ausschliesslich aus Gleichungen. Ein Problem mit einem n-dimensionalen Entscheidungsvektor und m Restriktionen hat die folgende Form:

$$\begin{aligned} \max\ z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n & \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad & \quad\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) & \end{aligned} \tag{23}$$

Eine **Basislösung** erhält man, wenn man vom obigen System $n-m$ Variablen gleich 0 setzt (die so genannten Nicht-Basisvariablen, NBV) und das System für die restlichen Variablen (die so genannten Basisvariablen, BV) löst. Als Beispiel dient ein Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Entscheidungsvariablen.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ -x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned} \tag{24}$$

Um eine Basislösung zu erhalten, müssen $3 - 2 = 1$ Variablen gleich 0 gesetzt werden. Setzt man $x_3 = 0$, so bekommt man:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ -x_2 &= -1 \end{aligned} \tag{25}$$

[7]Winston, 1994, S. 124ff.

Und als Lösung bekommt man $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$. Setzt man $x_1 = 0$, erhält man $x_2 = 3$ und $x_3 = 2$. Und schliesslich erhält man für $x_2 = 0$ als Lösung der Basisvariablen $x_1 = 3$ und $x_3 = -1$.

Eine Basislösung heisst **zulässige Basislösung**, wenn alle Variablen einen Wert ≥ 0 annehmen. Dies ist im Beispiel dann der Fall, wenn als Nicht-Basisvariablen x_1 oder x_3 gewählt werden. Für x_2 als Nicht-Basisvariable nimmt x_3 einen negativen Wert an. Die Basislösung $x_1 = 3$, $x_3 = -1$ ist keine zulässige Basislösung.

Zurück zum Beispiel des Anlegers. Er sieht sich mit dem folgenden linearen Programm konfrontiert.

$$\begin{aligned} \max\ f(x) = 0.02x_c + 0.04x_f & \\ x_c + x_f &\leq 10 \\ x_f &\leq 8 \\ x_c, x_f \geq 0 & \end{aligned} \tag{26}$$

Um dieses in die Standardform zu transformieren, werden so genannte **Schlupfvariablen** eingeführt. Jeder Ungleichung der Form $\leq$ wird auf der linken Seite eine Variable s_j $(j = 1, 2 \ldots, m)$ dazu addiert, mit der Bedingung, dass die Schlupfvariablen s_j nichtnegativ sind. Aus den Ungleichungen werden dann – wie für die Standardform gefordert – Gleichungen. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} \max\ f(x) = 0.02x_c + 0.04x_f & \\ x_c + x_f + s_1 &= 10 \\ x_f + s_2 &= 8 \\ x_c, x_f, s_1, s_2 \geq 0 & \end{aligned} \tag{27}$$

Die zulässige Menge des linearen Programms ist in der Abbildung 7 schattiert. Gekennzeichnet sind auch die Eckpunkte der zulässigen Menge. Bei der Suche nach der optimalen Lösung sind folgende zwei Theoreme hilfreich. Erstens, die optimale Lösung des Problems befindet sich in einem Eckpunkt der zulässigen Menge. Dies ist unmittelbar einsichtig, wenn man die Optimalwertkriterien im vorangehenden Abschnitt betrachtet. Und zweitens, die zulässigen Basislösungen sind die Eckpunkte der konvexen zulässigen Menge. Eine zulässige Basislösung ist der Schnittpunkt von Niveaumengen. Dies ist in der Regel ein Punkt. Im System (27) schneiden sich die beiden Geraden für verschiedene Basislösungen in verschiedenen Punkten. Diese Punkte sind die Eckpunkte der zulässigen Menge. Daraus folgt: Die optimale Lösung ist eine der zulässigen Basislösungen.

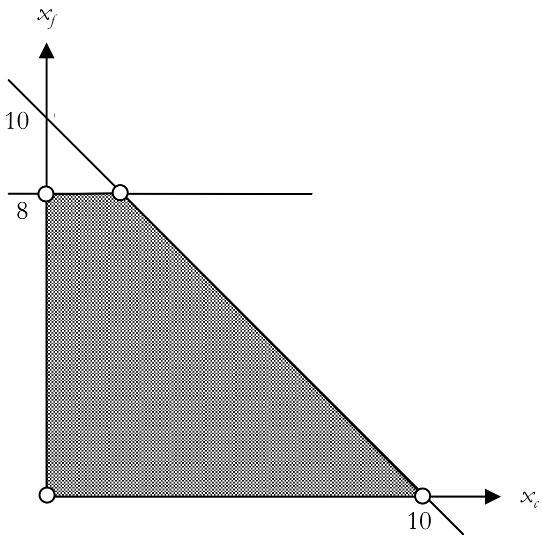

Abbildung 7

In der Abbildung 7 ist ersichtlich, dass der Punkt $(x_c, x_f) = (0, 10)$ ausserhalb der zulässigen Menge liegt. Setzt man diesen Punkt in das Restriktionensystem (27) ein, so erhält man keine Lösung. Dies bedeutet, dass die Berechnung die Vermutung aufgrund der grafischen Analyse stützt und es sich beim Punkt $(x_c, x_f) = (0, 10)$ zwar um eine Basislösung, jedoch um eine unzulässige, handelt.

Schliesslich muss noch das Konzept der **benachbarten Lösungen** behandelt werden, bevor auf die Simplex-Methode eingegangen werden kann. Zwei Basislösungen heissen benachbart, wenn sie sich nur durch eine Basisvariable unterscheiden. Grafisch bedeutet dies, dass zwei Lösungen durch eine Kante verbunden sind. Wie dies in Abbildung 7 beispielsweise für die Punkte $(x_c, x_f) = (0, 0)$ und $(x_c, x_f) = (0, 8)$ der Fall ist.

Die Simplex-Methode ist ein Algorithmus. Begonnen wird mit einer zulässigen Basislösung.[8] Diese wird dahingehend überprüft, ob sie die optimale Lösung darstellt. Da der Zulässigkeitsbereich konvex ist, reicht es aus, sämtliche benachbarten zulässigen Basislösungen zu betrachten. Ist keine dieser Basislösungen grösser als die aktuelle, so bricht der Algorithmus hier ab und die optimale Lösung ist gefunden. Ergibt eine oder mehrere der benachbarten Basislösungen einen grösseren Zielfunktionswert, so ist eine dieser Lösungen auszuwählen. (Die Auswahl ist dabei heuristisch, könnte also lauten, dass man die Lösung mit dem grössten Zielfunktionswert nimmt.) Die neue Basislösung ist wiederum auf Optimalität zu überprüfen und so weiter.

[8] Im klassischen Maximierungsproblem ist der Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$ eine zulässige Lösung.

Die Methode soll nun auf das Beispiel des Anlegers angewandt werden. Seine Entscheidungsmöglichkeiten sind in der Standardform (27) dargestellt. Das Gleichungssystem enthält zwei Gleichungen mit vier Variablen. Es sind daher $4 - 2 = 2$ Nicht-Basisvariablen zu bestimmen. Begonnen wird im Ursprung des Koordinatensystems, also bei $(x_c, x_f) = (0, 0)$. Daher gilt $NBV = \{x_c, x_f\}$ und $BV = \{s_1, s_2\}$. Für die Schlupfvariablen resultiert $s_1 = 10$ und $s_2 = 8$. Für den Zielfunktionswert erhält man $f(x) = 0.02x_c + 0.04x_f = 0$. Um die benachbarten Ecken zu prüfen, wird jeweils eine Basisvariable (BV) ausgetauscht. Das System ist also für folgende Kombinationen zu berechnen: $BV = \{x_f, s_2\}, \{x_f, s_1\}, \{x_c, s_2\}, \{x_c, s_1\}$. Diesen Basisvariablen entsprechen folgende Nichtbasisvariablen und Lösungen:[9]

$BV = \{x_f, s_2\}$	$NBV = \{x_c, s_1\}$	$(x_f, s_2) = (10, -2)$	$f(x) = 0.4$
$BV = \{x_f, s_1\}$	$NBV = \{x_c, s_2\}$	$(x_f, s_1) = (8, 2)$	$f(x) = 0.32$
$BV = \{x_c, s_2\}$	$NBV = \{x_f, s_1\}$	$(x_c, s_2) = (10, 8)$	$f(x) = 0.2$
$BV = \{x_c, s_1\}$	$NBV = \{x_f, s_2\}$	keine Lösung	

Zulässige Basislösungen finden sich also für $BV = \{x_f, s_1\}$ und $BV = \{x_c, s_2\}$. Beide bringen eine Verbesserung des Zielfunktionswerts. Welche von den beiden Kombinationen von BV man wählt, ist nicht vorgeschrieben. Man kann sich aber – wie gesagt – beispielsweise für diejenige entscheiden, die die grössere Verbesserung des Zielfunktionswerts bringt. Dies ist $BV = \{x_f, s_1\}$. Wiederum sollen durch Ersetzen einer Variablen benachbarte Eckpunkte einerseits auf ihre Zulässigkeit, andererseits auf eine allfällige Verbesserung des Zielfunktionswerts hin überprüft werden. Als neue Möglichkeit tritt einzig $BV = \{x_f, x_c\}$ hinzu. Diese Auswahl an Basisvariablen ergibt $(x_f, x_c) = (8, 2)$ und $NBV = \{s_1, s_2\}$; als neuen Zielfunktionswert erhält man $f(x) = 0.36$. Es stellte sich also heraus, dass der Punkt eine zulässige Basislösung ist und zu einem besseren Zielfunktionswert führt. Der neue Punkt wird wiederum auf zulässige Anstiegsrichtungen hin untersucht. Solche sind keine vorhanden. Denn ein neuerlicher Austausch einer Basisvariablen führt ausschliesslich zu bereits berechneten Lösungen und diese sind kleiner oder unzulässig. Der Punkt $(x_f, x_c) = (8, 2)$ ist optimal. Der maximale Zinsertrag, den der Anleger bei einer Anlage von $E = 10$ und einer minimalen Haltung von liquiden Mitteln im Wert von $x_{liquid} = 2$ erlangen kann beträgt also $f(x) = 0.36$. Dieses Resultat erreicht er, indem er $x_c = 2$ Einheiten in Callgeld und $x_f = 8$ Einheiten in Festgeld anlegt.

Der mit dem Algorithmus beschrittene Weg ist in Abbildung 8 eingezeichnet. Hier ist auch die Analogie zum primalen Optimalitätskriterium gut zu erkennen. Ausgehend von einer zulässigen Lösung werden Anstiegsrichtungen gesucht. Liegen solche vor, wird

[9] In der folgenden Auflistung wurden die Nicht-Negativitäts-Bedingungen der Schlupfvariablen weggelassen, so dass s_1 und s_2 auch negative Werte annehmen können.

eine ausgewählt und beschritten. So gelangt man zum neuen Eckpunkt, von dem aus wiederum neue Anstiegsrichtungen gesucht werden.

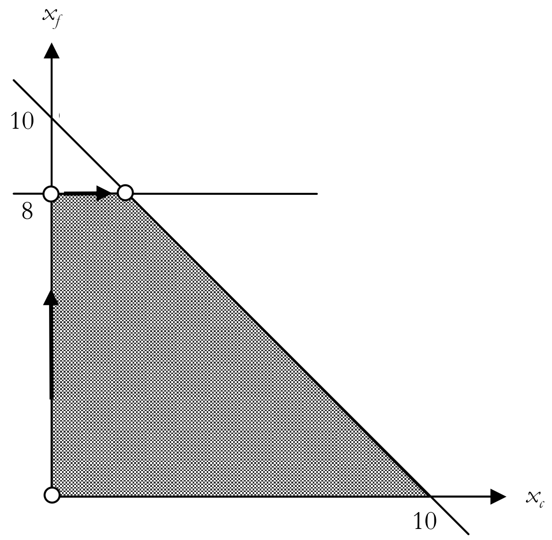

Abbildung 8

Zu unterscheiden von der Simplex-Methode, wie sie oben besprochen wurde, ist der darauf aufbauende Simplex-Algorithmus. Dieser liegt auch verschiedenen rechnergestützten Programmen zu Grunde. Mit Hilfe von so genannten Simplex-Tableaus ist es möglich, den Austausch von Basisvariablen elegant zu rechnen.[10]

[10] Der Simplex-Algorithmus wird hier nicht besprochen. Vgl. zu diesem Thema Dantzig, 1963, S. 94. Dantzig hat als erster den Simplex-Algorithmus beschrieben.

2.5 Sensitivitätsanalyse und Dualität

Bis anhin ging es darum, die optimale Lösung eines linearen Programms zu bestimmen. Es galt beispielsweise, die Anlagestrategie zu bestimmen, welche den grössten Zinsertrag abwirft. Denkbar wäre auch, die minimalen Kosten für die Produktion zu bestimmen etc. Die lineare Programmierung ist aber noch viel mehr zu leisten im Stande. Wichtige Konzepte sind diejenigen der Sensitivitätsanalyse und der Dualität. Diese Konzepte eröffnen dem Leser die „Schönheit und Logik linearer Programmierung.“[11]

2.5.1 Sensitivitätsanalyse

Mit Hilfe der Sensitivitätsanalyse ist es möglich, zu bestimmen, wie viel Wert die Relaxion einer Restriktion hat.

Hinter den Restriktionen von linearen Programmen verbergen sich ökonomische Vorgaben. Diese sind teilweise von dem einzelnen Akteur nicht zu beeinflussen. Man denke beispielsweise an die Nachfrage in einem vollkommenen Markt. Oftmals sind solche Vorgaben aber auch abänderbar. Beispielsweise könnten Budgetrestriktionen gelockert werden, indem Mittel auf dem Geld- oder Kapitalmarkt zugekauft werden. Von Interesse ist daher zu wissen, wie viel zusätzlicher Ertrag bei der Lockerung einer Restriktion zu erwarten ist. Diese Frage ist Gegenstand der Sensitivitätsanalyse.

Im Beispiel des Anlegers besteht die optimale Lösung darin, 8 Einheiten seines Vermögens in Festgeld (x_f) und 2 Einheiten in Callgeld (x_c) anzulegen. Das lineare Programm wurde oben folgendermassen definiert:

$$\begin{aligned} \max \ f(x) = 0.02x_c + 0.04x_f & \\ x_c + x_f &\leq 10 \quad \text{(Budgetrestriktion)} \\ x_f &\leq 8 \quad \text{(Mindestliquidität)} \\ x_c, x_f \geq 0 & \end{aligned} \tag{28}$$

Daraus geht hervor, dass, wenn die Restriktion für die Mindestliquidität ($x_f \leq 8$) um eine Einheit gelockert wird, eine Vergrösserung des Zielfunktionswertes um 0.02 Einheiten resultiert. Betrachtet man die Abbildung 2, so liegt auf der Hand, dass eine Relaxion der Mindestliquiditäts-Bedingung aber nicht in beliebigem Ausmass eine Verbesserung des optimalen Zielfunktionswerts um die errechneten 0.02 erbringt. Gilt für die zweite Restriktion (Mindestliquidität) einmal $x_f \leq 10$, bei gleich bleibender Budgetrestriktion, so geht mit einer weiteren Relaxion dieser Restriktion keine Verbesserung des Zielfunktionswerts mehr einher. Wird neu verlangt, dass x_f maximal 11 Einheiten

[11] Winston, 1994, S. 233.

beträgt, so lautet das System wie folgt:

$$\begin{aligned} \max\ f(x) = 0.02x_c + 0.04x_f & \\ x_c + x_f &\leq 10 \\ x_f &\leq 11 \\ x_c, x_f \geq 0 & \end{aligned} \tag{29}$$

Dass diese neuerliche Relaxion im Vergleich zur Relaxion auf $x_f \leq 10$ nichts mehr bringt, ist auch in Abbildung 9 zu sehen.

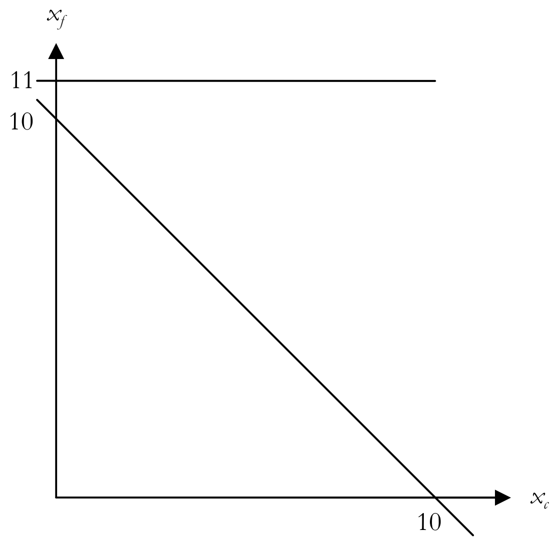

Abbildung 9

Die Aussagen betreffend die Verbesserung des optimalen Zielfunktionswertes haben nur so lange Gültigkeit, als sich die optimale zulässige Basislösung nicht ändert. Für die Relaxion der Mindestliquidität bedeutet dies, dass im folgenden System Δ so gross werden kann, als dass dadurch nicht eine andere Restriktion verletzt wird.

$$\max\ f(x) = 0.02x_c + 0.04x_f \tag{30}$$

$$x_c + x_f + s_1 = 10 \tag{31}$$

$$x_f + s_2 = 8 + \Delta \tag{32}$$

$$x_c, x_f, s_1, s_2 \geq 0$$

Hier darf Δ maximal 2 betragen. Für $\Delta > 2$ hat das System für $(s_1, s_2) = (0, 0)$ keine Lösung mehr und diese Basislösung ist daher nicht mehr zulässig.[12]

[12] Für eine eingehendere Behandlung der Problematik von sich ändernden optimalen zulässigen Basislösungen vgl. Winston, S. 248ff.

2.5.2 Dualisierung

Mit jedem linearen Programm ist ein weiteres verbunden. Lineare Programme treten stets paarweise auf.[13] Die beiden Programme heissen primal und dual. Welches Programm das primale und welches das duale ist, bestimmt sich einzig danach, welches als Ausgangslage dient. Aus dem primalen wird also das duale lineare Programm abgeleitet. Im Folgenden wird ein Vorgehen beschrieben, wie eben diese Umformulierung des primalen in das duale Programm möglich ist. Es geht an dieser Stelle nicht darum, dieses Vorgehen herzuleiten. Ebenfalls soll das Vorgehen nur an standardisierten linearen Programmen gezeigt werden. Das Vorgehen ist aber auch auf nicht-standardisierte Probleme anwendbar.[14] Standardisiert heisst, dass bei einem Maximierungsproblem ausschliesslich $\leq$-Restriktionen und bei einem Minimierungsproblem ausschliesslich $\geq$-Restriktionen vorliegen.

Als Ausgangslage (und daher als primales lineares Programm) dient ein standardisiertes Maximierungsproblem mit der folgenden Form:

$$\begin{array}{lccccccc} \max & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \dots & c_nx_n & & \\ & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & a_{2n}x_n & \leq & b_1 \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\ & \multicolumn{8}{l}{x_j \geq 0\,(j = 1, 2, \dots, n)} \end{array} \tag{33}$$

Oder gleichbedeutend in Matrizenform:

$$\begin{gathered} \max\ c' \cdot x \\ A \cdot x \leq b \\ x \geq 0 \end{gathered} \tag{34}$$

Das duale lineare Programm hat nun die folgende Form:

$$\begin{array}{lccccccc} \min & b_1y_1 & + & b_2y_2 & + & \dots & b_my_m & & \\ & a_{11}y_1 & + & a_{21}y_2 & + & \dots & a_{m1}y_m & \geq & c_1 \\ & a_{12}y_1 & + & a_{22}y_2 & + & \dots & a_{m2}y_m & \geq & c_1 \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ & a_{1n}y_1 & + & a_{2n}y_2 & + & \dots & a_{mn}y_m & \geq & c_n \\ & \multicolumn{8}{l}{y_i \geq 0\,(j = 1, 2, \dots, m)} \end{array} \tag{35}$$

[13] Ohse, 1998, S. 223.

[14] Vgl. dazu Winston, 1994, S. 268ff.

Oder wiederum in Matrizenform ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \min\ b' \cdot y \\ A' \cdot y \geq c \\ y \geq 0 \end{aligned} \tag{36}$$

Eine wichtige Erkenntnis ist, dass ein primales Maximierungsproblem ein duales Minimierungsproblem ergibt und umgekehrt. Weiter wird aus dem Vektor, der im primalen System die rechte Seite der Restriktionen darstellt, der Koeffizientenvektor der Zielfunktion. Die Koeffizientenmatrix des Restriktionensystems wird transponiert. Ist das primale ein Programm mit einem n-dimensionalen Entscheidungsvektor und m Restriktionen, so hat das duale Programm einen m-dimensionalen Entscheidungsvektor und n Restriktionen.

Wie bereits erwähnt, sind die Abbildung eines primalen in ein duales und die Abbildung eines dualen in ein primales System vollkommen äquivalent. Um also das duale eines standardisierten Minimierungsproblems zu finden, definiert man das System (35) bzw. (36) als primales System und bekommt als duales das System (33) bzw. (34). Zu erwähnen bleibt, dass der optimale Zielfunktionswert des primalen mit dem optimalen Zielfunktionswert des dualen Systems übereinstimmt (Dualitäts-Theorem).[15]

2.5.3 Schattenpreise

Von zentraler betriebswirtschaftlicher Bedeutung ist die Interpretation der Dualvariablen als so genannte Schattenpreise. Wichtig ist dabei die Erkenntnis, dass die einzelnen dualen Restriktionen den Variablen im primalen Programm entsprechen.

Für den Anleger wurde folgendes lineares Programm definiert:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} \max\ f(x) & = & 0.02\,x_c & + & 0.04\,x_f & & & \\ & & x_c & + & x_f & \leq & 10 & \text{(Budgetrestriktion)} \\ & & & & x_f & \leq & 8 & \text{(Mindestliquidität)} \\ & & & & x_c, x_f & \geq & 0 & \end{array} \tag{37}$$

Das duale, lineare Programm lautet, entsprechend dem oben formulierten Bildungsgesetz:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} \min\ g(y) & = & 10\,y_1 & + & 8\,y_2 & & & \\ & & y_1 & & & \geq & 0.02 & \text{(Callgeld)} \\ & & y_1 & + & y_2 & \geq & 0.04 & \text{(Festgeld)} \\ & & & & y_1, y_2 & \geq & 0 & \end{array} \tag{38}$$

[15] Eine Herleitung findet sich in Winston, 1994, S. 282ff.

Die optimale Lösung für das duale, lineare Programm ist $g(y) = 0.36$. Dies folgt einerseits durch Lösen des Systems, andererseits aus dem Dualitäts-Theorem. Die optimale Lösung des dualen linearen Programms stellt sich ein, wenn die Dualvariablen folgende Werte annehmen. $(y_1, y_2) = (0.02, 0.02)$. Diese Lösung lässt sich nun wie folgt interpretieren: Da y_1 der ersten Restriktion im primalen, linearen Programm, also der Budgetrestriktion, entspricht, folgt, dass eine Erhöhung der rechten Seite um eine Einheit, also von 10 auf 11, eine Erhöhung des Zielfunktionswerts um 0.02 zur Folge hat. Dieselbe Erhöhung des Zielfunktionswerts verspricht eine Relaxion der zweiten Restriktion um eine Einheit, da y_2 im Optimum ebenfalls einen Wert von 0.02 hat. Die zweite Restriktion besagt, dass maximal 8 Einheiten in Festgeld investiert werden dürfen. Eine Relaxion dieser Restriktion bedeutet also eine Verringerung der Liquidität.

Als betriebswirtschaftliche Konsequenz aus den obigen Überlegungen ergibt sich, dass der Anleger bereit ist, für die Relaxion einer der beiden Restriktionen des primalen linearen Programms, also der Mindestliquidität oder der Budgetrestriktion, maximal den Schattenpreis, also 0.02 zu bezahlen. Betreffend die Mindestliquidität zeigt dies dem Investor an, auf wie viel Ertrag er aufgrund seiner (eigenen) Begrenzung von Festgeld verzichtet. Interessant ist aber auch die Betrachtung des Schattenpreises der Budgetrestriktion. In diesem sieht der gewinnmaximierende Anleger den Preis, den er maximal zu bezahlen bereit ist für den Zukauf einer Einheit Fremdkapital. Konkret ist der Anleger dann dazu bereit, Fremdkapital aufzunehmen, wenn der zu verzeichnende Gewinn aus der einhergehenden Relaxion der Budgetrestriktion, also $y_1 = 0.02$ pro Geldeinheit, grösser ist als der Schuldendienst, den zu leisten er sich verpflichtet.[16]

Nochmals sei erwähnt, dass die Schlussfolgerungen, die aus den Schattenpreisen der Restriktionen über die Relaxion einzelner Restriktionen gezogen werden, nur gelten, so lange die optimale zulässige Basislösung gleich bleibt. Das heisst so lange, als keine neue Variable in die Basislösung Eingang findet.

[16] Da bei Festgeldanlagen regelmässig Banken als Gegenpartei auftreten, können diese als sicher gelten. Darum übersteigt der Gewinn aus Festgeldanlagen die Schuldzinsen für Privatanleger, aufgrund von Arbitrageüberlegungen, sinnvollerweise nicht.

3 Anwendungen

Nachdem wir die Grundlagen zum Verständnis vom Funktionieren von linearen Programmen erarbeitet haben, sollen diese nun an vier verschiedenen betriebswirtschaftlichen Problemstellungen angewendet werden. Mit der Ausweitung des Entscheidungsraumes auf mehr als zwei Dimensionen und entsprechend auch mehr Restriktionen, wird das Auffinden der optimalen Lösungen nicht mehr so trivial, wie im Beispiel des Anlegers. Mit Ausnahme des Transportproblems, wo sich eine elegante Möglichkeit bietet, das Programm „von Hand“ zu lösen, werden die linearen Programme im Folgenden rechnergestützt gelöst. Die verwendete Software heisst „General Algebraic Modeling System (GAMS)“. Im Anhang sind die verwendeten GAMS-Programme aufgeführt.

3.1 Mischproblem

Die erste Anwendung beschränkt sich auf zwei Entscheidungsvariablen. Neu handelt es sich aber um ein Minimierungsproblem. Es gilt den minimalen Wert der Zielfunktion zu finden. Die Anwendung ist ein so genanntes Mischproblem.

Zur Raffinierung von Benzin, Diesel und Heizöl kann eine Unternehmung leichtes oder schweres Rohöl einkaufen. Aus einem Fass der beiden Rohöle lassen sich Raffinerieprodukte zu folgenden Anteilen gewinnen:

	Benzin	Diesel	Heizöl
Leichtes Rohöl	0.50	0.30	0.15
Schweres Rohöl	0.20	0.30	0.40

Der Rest sind Raffinerieverluste.

Das Unternehmen soll folgende Mengen der besagten Mineralölerzeugnisse herstellen:

Benzin:	1 500 000	Fass
Diesel:	1 200 000	Fass
Heizöl:	1 000 000	Fass

Der Preis für ein Fass leichtes Rohöl beträgt USD 20, der für schweres USD 15. Zu ermitteln sind die kostenminimierenden Bestellmengen von leichtem und schwerem Rohöl.

Wir definieren die folgenden kontinuierlichen, nicht-negativen Variablen:

l: leichtes Rohöl [in Fass]
s: schweres Rohöl [in Fass]
c: Kosten [in USD]

Die Zielfunktion lautet dann:

$$\min \; c = 20l + 15s \tag{39}$$

Und die Nebenbedingungen sind:

$$\begin{array}{rcrcrl} 0.5l & + & 0.2s & \geq & 1\,500\,000 & \text{(Benzin)} \\ 0.3l & + & 0.3s & \geq & 1\,200\,000 & \text{(Diesel)} \\ 0.15l & + & 0.4s & \geq & 1\,000\,000 & \text{(Heizöl)} \end{array} \tag{40}$$

Die optimale Lösung dieses linearen Programms lautet:

$$\begin{array}{rr} l = & 2\,333\,333 \\ s = & 1\,666\,667 \\ c = & 81\,333\,333 \end{array}$$

Es werden demnach 2 333 333 Fass leichtes und 1 666 667 Fass schweres Rohöl gebraucht, um die geforderten Mengen an Mineralölerzeugnissen herzustellen. Vom Benzin und Diesel werden die geforderten Minimalmengen hergestellt. Beim Heizöl resultiert ein Überschuss von 16 667 Fass. Das Unternehmen hat Gestehungskosten von USD 81 333 333.

3.2 Kapitalbudgetierung

Bei der Kapitalbudgetierung werden beschränkte finanzielle Mittel auf verschiedene Investitionen verteilt. Ziel eines Programms ist es, die Mittel so zu allozieren, dass ein maximaler Gewinn resultiert[17]. Mit Gewinn sind dabei die abdiskontierten Zuflüsse X_t (also der Barwert des Projektes) abzüglich den abdiskontierten Abflüsse I_t gemeint.

$$NPV = -\sum_{t=1}^{n} \frac{I_t}{(1+k_t)^t} + \sum_{t=1}^{n} \frac{X_t}{(1+k_t)^t} \tag{41}$$

NPV steht für Net Present Value. Dabei bezeichnet k den Diskontierungszins und t die Zeitperiode. Die Zuflüsse werden nicht thesauriert und sind von einander unabhängig.

Im folgenden Beispiel sind die NPV von vier Projekten gegeben. Es geht nun darum, die Summe der NPV unter einer Budgetrestriktion zu maximieren. Die Projekte erstrecken sich über zwei Perioden. Gewinne aus der ersten Periode können nicht in Projekte der zweiten Periode investiert werden. Jedes der Projekte kann maximal einmal ausgeführt werden, kann aber beliebig geteilt werden. In der Tabelle sind die Ausgaben und Zuflüsse der einzelnen Projekte angegeben. Die Ausgaben sind auf 28 Geldeinheiten (GE) in der ersten und 22 GE in der zweiten Periode zu beschränken (Budgetrestriktion).

Projekt	Ausgaben		NPV
	Periode 1	Periode 2	
1	14	7	18
2	11	13	17
3	8	9	16
4	12	6	15

Die Variablen x_j ($j = 1, 2, 3, 4$) geben die Gewichte an, mit denen die verschiedenen Projekte bewertet werden. Die Gewichte liegen zwischen 0 und 1. Da 4 Projekte vorliegen, erhält man einen 4-dimensionalen Entscheidungsvektor. Die Zielfunktion summiert die gewichteten NPV der Projekte.

$$\max\ y = \sum_{j=1}^{4} x_j \cdot NPV_j \tag{42}$$

NPV_j sei der NPV des Projektes j.

Die Investitionen dürfen das Budget für die betreffende Periode nicht übersteigen. c_t ist das Budget in der Periode t. $p_{t,j}$ sind die Ausgaben für das Projekt j in der Periode

[17] Winston, 1994, S. 78.

t. Als Restriktionensystem erhält man:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{4} p_{t,j} &\leq c_t \ (t=1,2) \\ x_j &\leq 1 \ (j=1,2,3,4) \\ x_j &\geq 0 \ (j=1,2,3,4) \end{aligned} \tag{43}$$

Das lineare Programm kann auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} \max\ y & = & 18x_1 & + & 17x_2 & + & 16x_3 & + & 15x_4 & & \\ & & 14x_1 & + & 11x_2 & + & 8x_3 & + & 12x_4 & \leq & 28 \\ & & 7x_1 & + & 13x_2 & + & 9x_3 & + & 6x_4 & \leq & 22 \\ 0 & \leq & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & \leq & 1 \end{array} \tag{44}$$

Anzumerken ist, dass mit der letzten Zeile des Systems (44) nicht bloss die Nicht-Negativitäts-Bedingungen konstituiert werden, sondern dass mit der Bedingung $x_j \leq 1$ $(j = 1,2,3,4)$ vier weitere Zeilen zusammengefasst werden. Das lineare Programm hat demnach 4 primale Variablen und 6 Restriktionen. Das zugehörige duale, lineare Programm hat 6 Variablen und 4 Restriktionen:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl} \min\ w & = & 28v_1 & + & 22v_2 & + & u_1 & + & u_2 & + & u_3 & + & u_4 & & \\ & & 14v_1 & + & 7v_2 & + & u_1 & & & & & & & \leq & 18 \\ & & 11v_1 & + & 13v_2 & & & + & u_2 & & & & & \leq & 17 \\ & & 8v_1 & + & 9v_2 & & & & & + & u_3 & & & \leq & 16 \\ & & 12v_1 & + & 6v_2 & & & & & & & + & u_4 & \leq & 15 \\ 0 & \leq & v_1, & & v_2, & & u_1, & & u_2, & & u_3 & & u_4 & \geq & 0 \end{array} \tag{45}$$

Löst man wahlweise das primale oder das duale, lineare Programm, so erhält man folgende Lösung:

optimale primale Lösung	optimale duale Lösung
x_1 = 1.000	u_1 = 0.500
x_2 = 0.400	u_2 = 0.000
x_3 = 1.000	u_3 = 3.833
x_4 = 0.133	u_4 = 0.000
	v_1 = 1.033
	v_2 = 0.433
y = 42.800	w = 42.800

Die optimale Lösung des linearen Programms beträt 42.800 GE. (Aufgrund des Dualitäts-Theorems wissen wir, dass die optimale primale Lösung gleich der optimalen dualen Lösung sein muss.) Die Werte für die primalen und dualen Entscheidungsvariablen sind wie folgt zu interpretieren: Der maximale Wert für die Summe der NPV wird dadurch erreicht, dass man sich zu 40% am Projekt 2 beteiligt, das Projekt 4 zu 13.3% mitträgt und die Projekte 1 und 3 zu 100% übernimmt. Im Fall von Projekt 1 bedeutet dies, dass in der ersten Periode Ausgaben von 14 und in der zweiten Periode Ausgaben von 7 anfallen. Der Nettowert der diskontierten Zuflüsse für dieses Projekt beträgt 18. Analoge Aussagen lassen sich auch für die weiteren drei Projekte machen.

Die Lösung des linearen Programms liefert aber nicht nur diese Erkenntnisse, sondern gibt mit der dualen Lösung interessante Informationen bezüglich der Relaxion einzelner Restriktionen. Wenn man sich unter den Projekten Bauvorhaben vorstellt, scheint eine Lockerung des zulässigen Intervalls der x-Werte wenig sinvoll. Weder kann ein Projekt ohne weiteres mehrfach ausgeführt werden, noch ist die Vorstellung naheliegend, ein Bauprojekt short zu gehen. Die Restriktion $0 \leq x \leq 1$ soll aufrechterhalten bleiben. Anders sieht dies mit einer Budgetbeschränkung für die einzelnen Perioden aus.

Es kann sich durchaus auszahlen, die Dualvariablen der (internen) Budgetrestriktionen etwas genauer zu betrachten. Denn Vorgaben betreffend Kreditlinien können gelockert werden, indem man im Unternehmen von höherer Stelle mehr Gelder beantragt bzw. solche Gelder auf den Finanzmärkten zukauft. Eine solche Refinanzierung kann Sinn machen, wenn der zu leistende Schuldendienst, bzw. die Entschädigung der Eigenkapitalgeber durch die zusätzlichen Zuflüsse gedeckt werden kann.

Um sich für eine Budgetrestriktion zu entscheiden, die gelockert werden soll, muss man wissen, welche die grössere Verbesserung des NPV verspricht. Dazu betrachtet man die den beiden primalen Restriktionszeilen entsprechenden Variablen. Es sind dies für die Budgetrestriktion der ersten Periode ($t = 1$) $v_1 = 1.033$ und für die zweite Restriktion ($t = 2$) $v_2 = 0.433$. Eine Relaxion der Restriktion der t-ten Periode um r hat eine Vergrösserung der Summe der NPV um $r \cdot v_t$ zur Folge. Dies gilt nur so lange, als die optimale zulässige Basislösung keine anderen Variablen enthält. Unter dieser Voraussetzung ist hier die Budgetrestriktion der ersten Periode zu lockern.

Eine Relaxion der ersten Budgetrestriktion c_1 um eine GE auf neu $c'_t = 29$ bewirkt eine Vergrösserung des NPV um $1 \cdot v_2 = 1.033\,\mathrm{GE}$. Entsprechend hat eine Relaxion der zweiten Restriktion um eine GE eine Vergrösserung des NPV um $0.433\,\mathrm{GE}$ zur Folge (immer vorbehältlich, dass sich die Basisvariablen nicht ändern).

Bei einer Lockerung der ersten Restriktion um eine GE erwarten wir also einen NPV von $y' = 42.800\,\mathrm{GE} + 1 \cdot 1.033\,\mathrm{GE} = 43.833\,\mathrm{GE}$. Eine Berechnung des optimalen Zielfunktionswerts des linearen Programms mit dem neuen Budget $c'_1 = 29$ für die erste Restriktion bestätigt dies, wie folgender Auflistung zu entnehmen ist.

optimale primale Lösung	optimale duale Lösung
$x_1' = 1.000$	$u_1' = 0.500$
$x_2' = 0.333$	$u_2' = 0.000$
$x_3' = 1.000$	$u_3' = 3.833$
$x_4' = 0.278$	$u_4' = 0.000$
	$v_1' = 1.033$
	$v_2' = 0.433$
$y' = 43.833$	$w' = 43.833$

Wird die erste Budgetrestriktion im Vergleich zur Ausgangssituation um 10 GE gelockert (neu sollen in der ersten Periode also $c_1'' = 38\,\text{GE}$ zur Verfügung stehen), so vergrössert sich der NPV nicht um $10 \cdot 1.033\,\text{GE} = 10.33\,\text{GE}$, wie dies aufgrund der dualen Lösung zu erwarten wäre. Eine Berechnung des linearen Programms mit besagter Relaxion ergibt für den NPV $y'' = 49.000\,\text{GE}$, was einer Steigerung um lediglich 6.200 GE entspricht. Der Grund dafür liegt – wie bereits mehrfach besprochen – darin, dass vormalige Nicht-Basisvariablen zu Basisvariablen wurden. Und entsprechend wurden Basisvariablen zu Nicht-Basisvariablen. Dies ist mit x_2' geschehen, an dessen Stelle nun eine Schlupfvariable in die Basislösung Eingang gefunden hat.[18]

optimale primale Lösung	optimale duale Lösung
$x_1'' = 1.000$	$u_1'' = 8.846$
$x_2'' = 0.000$	$u_2'' = 0.000$
$x_3'' = 1.000$	$u_3'' = 4.231$
$x_4'' = 1.000$	$u_4'' = 7.154$
	$v_1'' = 0.000$
	$v_2'' = 1.308$
$y'' = 49.000$	$w'' = 49.000$

v_1 beträgt hier 0. Eine weitere Erhöhung des Budgets für die erste Periode hätte also keine Auswirkung mehr auf das Ergebnis. Eine Berechnung zeigt, dass das Budget für die erste Periode bereits jetzt nicht voll ausgeschöpft ist.

$$14x_1 + 11x_2 + 8x_3 + 12x_4 = 14 + 8 + 12 = 34 < 38 \tag{46}$$

Ein weitere Erhöhung der Ausgaben in der ersten Periode erhöht zwangsläufig die Ausgaben der zweiten Periode. Das Budget der zweiten Periode ist jedoch vollständig ausgeschöpft. Die Projekte 1, 2 und 3 werden zu 100% ausgeführt, wohingegen das Projekt 2 zu 0% übernommen wird. Eine zusätzliche Investition in Projekt 2 kommt nicht

[18] Schlupfvariablen wurden für dieses Beispiel nicht explizit notiert, denn um das lineare Programm mit GAMS zu lösen, muss nicht notwendiger Weise die Standardform gebildet werden. Vgl. dazu den Anhang.

in Frage, da dies Ausgaben in der zweiten Periode zur Folge hätte. Würde hingegen – um eine zusätzlich Annahme zu treffen – die Budgetrestriktion der zweiten Periode ebenfalls gelockert, ist eine Steigerung des NPV zu erwarten. Eine Relaxion der zweiten Budgetbeschränkung um eine GE auf 23 GE (unter Beibehaltung des Budgets von 38 GE in der ersten Periode) verspricht eine Steigerung des NPV um $1 \cdot v_2'' = 1.308$ GE auf 50.308 GE. Diese Steigerung ist gleich dem NPV des zweiten Projektes dividiert durch die Ausgaben für die zweite Periode des zweiten Projektes: $\frac{17}{13} = 1.778$. Dies entspricht durchaus unseren Erwartungen, haben wir oben doch festgestellt, dass für die erste Periode genügend Geld vorhanden ist. Die aus den Dualvariablen der vorangegangenen Lösung gezogenen Schlüsse werden durch die Rechnung bestätigt:

optimale primale Lösung			optimale duale Lösung		
x_1'''	=	1.000	u_1'''	=	8.846
x_2'''	=	0.077	u_2'''	=	0.000
x_3'''	=	1.000	u_3'''	=	4.231
x_4'''	=	1.000	u_4'''	=	7.154
			v_1'''	=	0.000
			v_2'''	=	1.308
y'''	=	50.308	w'''	=	50.308

3.3 Transport

Das klassische Transportproblem stellt einen wichtigen Bereich der linearen Programmierung dar. Es zeichnet sich durch die folgenden Eigenschaften aus: An m Angebots-Punkten ist jeweils eine bestimmte Menge einer Ware vorhanden. Diese wird direkt an n Nachfrage-Punkte versandt, wo jeweils eine bestimmte Menge derselben Ware nachgefragt wird. Die Kosten des Transportes sind proportional zur transportierten Menge und die Gesamtkosten sind die Summe der einzelnen Transportkosten, das heisst, die Zielfunktion ist linear. Schliesslich entspricht die nachgefragte Menge der angebotenen.[19]

Übersteigt die angebotene die nachgefragte Menge, so muss das Transportproblem vor dem eigentlichen Lösen ausbalanciert werden. Dazu wird eine Dummy-Nachfrage eingefügt. Die Transportkosten von jedem Angebots-Punkt zu diesem Dummy betragen 0. Die Nachfrage des Dummys entspricht exakt dem Überschussangebot. Ist das Angebot zu klein, kann also nicht sämtliche Nachfrage befriedigt werden, so wird die Überschussnachfrage durch ein zusätzliches Angebot in gleicher Höhe befriedigt. Die Transportkosten einer Einheit von diesem zusätzlichen Angebot zu einem Nachfrager betragen genau so viel, wie dem Nachfrager aufgrund seiner unbefriedigten Nachfrage Kosten entstehen. So kann das soziale Optimum bei Überschussnachfrage bestimmt werden (unter Voraussetzung linearer Präferenz-Funktionen). Im Folgenden wird das Vorgehen anhand eines klassischen Transportproblems, also mit Markträumung, besprochen.

In einem Entwicklungsland bestehen keine Wasserleitungen. Das Wasser wird daher mittels Zisternenwagen von den Brunnen zu den verschiedenen Dorfgemeinschaften geliefert. Aus den drei Brunnen können monatlich folgende Mengen Wasser gefördert werden.

Brunnen 1: $a_1 = 500\,000$ Liter
Brunnen 2: $a_2 = 700\,000$ Liter
Brunnen 3: $a_3 = 400\,000$ Liter

Die Dörfer haben pro Monat folgende Nachfrage nach Wasser:

Dorf 1: $b_1 = 200\,000$ Liter
Dorf 2: $b_2 = 300\,000$ Liter
Dorf 3: $b_3 = 500\,000$ Liter
Dorf 4: $b_4 = 500\,000$ Liter

[19] Dantzig, 1963, S. 299. Winston, 1994, S. 339ff. bezeichnet das klassische Transportproblem als „balanced transportation problem“. Daher rührt auch der Begriff vom „ausbalancieren“ eines Transportproblems im folgenden Abschnitt.

Die Förderkosten pro Einheit Wasser sind für alle Brunnen in etwa gleich und proportional zur geförderten Menge. Sie sind demnach für unsere Betrachtung nicht relevant. Für die Berechnung relevant sind die variablen Kosten, die beim Transport des Wassers von den Brunnen zu den Dörfern anfallen. Die Annahme, dass diese linear mit der transportierten Menge Wasser steigen, stellt sicher eine Vereinfachung dar. Diese kann jedoch getroffen werden, wenn angenommen wird, dass die Zisternenwagen ein nicht sehr grosses Fassungsvermögen haben und darum viele Fahrten notwendig sind. Die Transportkosten c_{ij} von Brunnen i nach Dorf j betragen (in USD pro Liter Wasser):

	nach			
von	Dorf 1	Dorf 2	Dorf 3	Dorf 4
Brunnen 1	0.02	0.06	0.03	0.04
Brunnen 2	0.08	0.05	0.05	0.06
Brunnen 3	0.04	0.05	0.07	0.06

x_{ij} bezeichne die Menge des transportierten Wassers vom Brunnen i zum Dorf j (in Tausend Litern). Vom Brunnen i können monatlich maximal a_i Liter Wasser zu den Dörfern transportiert werden, es gilt daher:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & + & x_{14} & \leq & a_1 \\ x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & + & x_{24} & \leq & a_2 \\ x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} & + & x_{34} & \leq & a_3 \end{array} \tag{47}$$

Jedes Dorf j hat einen monatlichen Bedarf b_j an Wasser zu decken. Sämtliche Lieferungen von Wasser von den verschiedenen Brunnen müssen also den Bedarf eines Dorfes decken.

$$\begin{array}{ccccccc} x_{11} & + & x_{21} & + & x_{21} & \geq & b_1 \\ x_{12} & + & x_{22} & + & x_{32} & \geq & b_2 \\ x_{13} & + & x_{23} & + & x_{33} & \geq & b_3 \\ x_{14} & + & x_{24} & + & x_{34} & \geq & b_4 \end{array} \tag{48}$$

Aus der eingangs erwähnten Bedingung, dass die Summe des Angebotes gleich der Summe der Nachfrage sein muss, also

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{49}$$

folgt, dass sämtliche Restriktionen ausgeschöpft werden. Aus den Ungleichungen in (47) und (48) werden also Gleichungen. Das Restriktionensystem hat nun die folgende Form (in Tausend Litern):

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & + & x_{14} & = & 500 \\
x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & + & x_{24} & = & 700 \\
x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} & + & x_{34} & = & 400 \\
x_{11} & + & x_{21} & + & x_{31} & & & = & 200 \\
x_{12} & + & x_{22} & + & x_{32} & & & = & 500 \\
x_{13} & + & x_{23} & + & x_{33} & & & = & 400 \\
x_{14} & + & x_{24} & + & x_{34} & & & = & 500
\end{array} \tag{50}$$

Nach den einzelnen Entscheidungsvariablen geordnet und in Matrixschreibweise lautet das System (50):

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{33} \\ x_{34} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 500 \\ 700 \\ 400 \\ 200 \\ 500 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix} \tag{51}$$

Als Zielfunktion sollen die Transportkosten minimiert werden. Die Zielfunktion weist demnach folgende Form auf:

$$\begin{aligned}
\min\ C = \ & 0.02x_{11} + 0.06x_{12} + 0.03x_{13} + 0.04x_{14} \\
& + 0.08x_{21} + 0.05x_{22} + 0.05x_{23} + 0.06x_{24} \\
& + 0.04x_{31} + 0.05x_{32} + 0.07x_{33} + 0.06x_{34}
\end{aligned} \tag{52}$$

Allgemein hat ein klassisches Transportproblem die folgende Form:

$$\begin{array}{rcl}
\min & & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} & = & a_i \, (i = 1, 2, \ldots, m) \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} & = & b_j \, (j = 1, 2, \ldots, n) \\
x_{ij} & \geq & 0 \, (i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n)
\end{array} \tag{53}$$

Transport-Tableau

Zum Lösen des Transportproblems ist eine Tableau-Form hilfreich, die sämtliche notwendigen Informationen zum Auffinden der optimalen Lösung beinhaltet.

	nach				
von	Dorf 1	Dorf 2	Dorf 3	Dorf 4	Angebot
Brunnen 1	0.02	0.06	0.03	0.02	500
Brunnen 2	0.08	0.05	0.05	0.06	700
Brunnen 3	0.04	0.05	0.07	0.06	400
Nachfrage	200	500	400	500	

In den kleinen Kästen stehen die Transportkosten von Brunnen i nach Dorf j. Am Rande der Matrix sind die nachgefragten beziehungsweise angebotenen Mengen Wasser des jeweiligen Dorfes angegeben.

Lineare Programme bedürfen oftmals vieler Handarbeit, wenn man sie ohne Rechnerunterstützung lösen will. Transportprobleme bieten hier häufig eine angenehme Ausnahme.[20] Daher sei an dieser Stelle eine Methode beschrieben, mit der sich kleinere Transportprobleme lösen lassen. Wie bei der Standard-Simplex-Methode geht man von einer zulässigen Basislösung aus.

Finden einer zulässigen Basislösung

Da es sich bei den Restriktionen ausschliesslich um Gleichungen handelt, ist das Auffinden einer zulässigen Basislösung nicht so einfach. Dazu bieten sich aber verschiedene Algorithmen an. Ein Algorithmus ist die so genannte „Northwest Corner Method“.[21] Dieser Algorithmus vernachlässigt die Kosten. Begonnen wird, wie es der Titel besagt, in der oberen linken Ecke des Tableaus, also bei der Variable x_{11}. Diese wird so gross als möglich gesetzt. Die Nachfrage von Dorf 1 beträgt 200, das Angebot von Brunnen 1 ist 500. x_{11} kann demnach maximal den Wert 200 annehmen. Dies soll geschehen. Daraus folgt ein neues Tableau:

[20] Dantzig, 1963, S. 308.

[21] Winston, 1994, S. 354ff. An dieser Stelle finden sich auch noch weitere, effizientere Methoden, die eine Ausgangslösung mit besserem Zielfunktionswert liefern, da sie die Transportkosten bereits beim Suchen der Ausgangslösung berücksichtigen.

von	nach Dorf 1	Dorf 2	Dorf 3	Dorf 4	Angebot
Brunnen 1	0.02 200	0.06	0.03	0.02	300
Brunnen 2	0.08	0.05	0.05	0.06	700
Brunnen 3	0.04	0.05	0.07	0.06	400
Nachfrage	×	500	400	500	

In diesem Tableau wandert man nun eine Kolonne nach rechts, um auch das Angebot von Brunnen 1 voll aufzubrauchen. x_{12} nimmt also den Wert 300 an. Das Angebot von Brunnen 1 wird 0 und die Nachfrage von Dorf 2 beträgt noch 200. Um die restliche Nachfrage von Dorf 2 zu befriedigen wandert man eine Zeile nach unten. x_{22} nimmt den Wert 200 an und die Nachfrage von Dorf 2 wird 0. Das Angebot von Brunnen 2 verringert sich dabei auf 500. Ein weiterer Schritt nach rechts bringt einem zum Feld für x_{23}. Dieses nimmt den Wert 400 an, wodurch folgendes Tableau entsteht:

von	nach Dorf 1	Dorf 2	Dorf 3	Dorf 4	Angebot
Brunnen 1	0.02 200	0.06 300	0.03	0.02	×
Brunnen 2	0.08	0.05 200	0.05 400	0.06	100
Brunnen 3	0.04	0.05	0.07	0.06	400
Nachfrage	×	×	×	500	

Mit einem weiteren Schritt nach rechts, gelangt man ins Feld für x_{24} mit einem verbleibenden Angebot von Brunnen 2 in der Höhe von 100 und einer Nachfrage von Dorf 4 in der Höhe von 500. x_{24} nimmt den Wert 100 an, das Angebot von Brunnen 2 wird gleich 0, die Nachfrage von Dorf 4 reduziert sich auf 400 und man gelangt ins Feld für x_{34}. Übrig bleiben ein Angebot von 400 und eine Nachfrage von 400. Man erhält also eine zulässige Basislösung mit dazugehörigem Tableau:

von	nach Dorf 1	Dorf 2	Dorf 3	Dorf 4	Angebot
Brunnen 1	0.02 200	0.06 300	0.03	0.02	×
Brunnen 2	0.08	0.05 200	0.05 400	0.06 100	×
Brunnen 3	0.04	0.05	0.07	0.06 400	×
Nachfrage	×	×	×	×	

Diese Lösung hat die Basisvariablen

$$BV = \{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{23}, x_{24}, x_{34}\}$$

Die Kosten betragen:

$$C = 200 \cdot 0.02 + 300 \cdot 0.06 + 200 \cdot 0.05 + 400 \cdot 0.05 + 100 \cdot 0.06 + 400 \cdot 0.06 = 82$$

Unschwer zu erkennen ist der Ursprung des Namens dieser Methode. Man wandert von Nordwesten nach Südosten. Dabei verlässt man die aktuelle Zeile oder Spalte erst, wenn das betreffende Angebot beziehungsweise die betreffende Nachfrage gleich 0 ist.

Transport-Simplex

Die oben gefundene Lösung erfüllt die Gleichungen des Systems (50) beziehungsweise (51). Da die Kosten bei der Lösungsfindung aber nicht eingeflossen sind, wäre es ein Zufall, wenn dies schon die optimale, also kostenminimierende Lösung wäre. Wiederum kann man sich einige Eigenheiten von Transportproblemen zu Nutzen machen, um die gefundene Lösung auf ihre Optimalität hin zu überprüfen und nötigenfalls Basisvariablen auszutauschen.

Als erstes eine sehr hilfreiche Feststellung: Da das Angebot gleich der Nachfrage ist, ist eine zulässige Basislösung für das System nicht erst gefunden, wenn sämtliche Gleichungen erfüllt sind, sondern es reicht zu wissen, dass alle bis auf eine Gleichung erfüllt sind. Denn um der Bedingung der Gleichheit von Angebot und Nachfrage nachzukommen, muss die verbleibende Nachfrage gleich dem verbleibenden Angebot sein. Es kann also von einem Transportproblem in der Form, wie es im System (50) abgebildet ist, eine beliebige Zeile gestrichen werden und eine zulässige Basislösung der verbleibenden Restriktionen ist auch unter Einbezug der vormals gestrichenen Restriktion zulässig.

Nun aber zur eigentlichen Frage: Wie kann man feststellen, ob eine zulässige Basislösung die kostenminimale Lösung darstellt? Dies geschieht mit den Schattenpreisen der Restriktionen. $-u_i$ ist der Schattenpreis der i-ten Angebotsrestriktion und $-v_j$ ist der Schattenpreis der j-ten Nachfragerestriktion. Die Summe der negativen Schattenpreise der i-ten Angebotsrestriktion und der j-ten Nachfragerestriktion müssen für die Basisvariablen gleich den Transportkosten c_{ij} vom i-ten Brunnen zum j-ten Dorf sein. Es gilt daher für alle Basisvariablen:

$$u_i + v_j - c_{ij} = 0 \tag{54}$$

Zudem folgt aus der eingangs gemachten Feststellung, dass eine beliebige Zeile des Systems gestrichen werden kann, dass der Schattenpreis einer beliebigen Restriktion gleich 0 gesetzt werden kann. Wir definieren an dieser Stelle $u_1 = 0$ und erhalten das folgende Gleichungssystem mit den Schattenpreisen der Nachfrage- und Angebotsrestriktionen.

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_1 + v_1 &= 0.02 \\ u_1 + v_2 &= 0.06 \\ u_2 + v_2 &= 0.05 \\ u_2 + v_3 &= 0.05 \\ u_2 + v_4 &= 0.06 \\ u_3 + v_4 &= 0.06 \end{aligned}$$

Löst man dieses System, so erhält man die folgenden Werte:

$$\begin{array}{rcrcrcl} u_1 &=& 0 & \qquad & v_1 &=& 0.02 \\ u_2 &=& -0.01 & & v_2 &=& 0.06 \\ u_3 &=& -0.01 & & v_3 &=& 0.06 \\ & & & & v_4 &=& 0.07 \end{array}$$

Nun können wir die Summe der negativen Schattenpreise auch für die Nicht-Basisvariablen bilden. Interessant ist dabei der Vergleich mit den Transportkosten. Wir definieren also

$$\bar{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \tag{55}$$

Ist dieser Ausdruck grösser 0, so besteht die Möglichkeit, durch Tausch von Basisvariablen, Kosten einzusparen, denn die Summe der negativen Schattenpreise übersteigt die tatsächlichen Kosten. Umgekehrt erhält man das Optimalitätskriterium indem man sagt, dass die Basislösung genau dann optimal ist, wenn $\bar{c}_{ij} \leq 0$ für alle $i = 1, 2, 3$ und $j = 1, 2, 3, 4$ gilt.

Wir bilden nun die besagten Differenzen für sämtliche Nicht-Basisvariablen.

$$
\begin{aligned}
\bar{c}_{13} &= u_1 + v_3 - c_{13} &&= 0.03\\
\bar{c}_{14} &= u_1 + v_4 - c_{14} &&= 0.05\\
\bar{c}_{21} &= u_2 + v_1 - c_{21} &&= -0.07\\
\bar{c}_{31} &= u_3 + v_1 - c_{31} &&= -0.03\\
\bar{c}_{32} &= u_3 + v_2 - c_{32} &&= 0\\
\bar{c}_{33} &= u_3 + v_3 - c_{33} &&= -0.01
\end{aligned}
$$

$\bar{c}_{13}$ und $\bar{c}_{14}$ sind beide > 0. Es handelt sich demnach bei der gefundenen Lösung nicht um die optimale. Der grössere der beiden Werte, $\bar{c}_{14}$, verspricht die grössere Verbesserung, das heisst Verkleinerung des Zielfunktionswertes. Die Auswahl ist heuristisch und daher nicht zwingend. x_{14} soll also neu zu einer Basisvariablen werden. Dazu bildet man als erstes eine Schleife nach folgender Bedingung: Aus der neuen Basisvariablen und einigen alten ist eine geordnete Auswahl (von insgesamt mindestens 4) zu treffen, so dass immer genau zwei aufeinander folgende Variablen in der selben Reihe oder Kolonne liegen. Die letzte und die erste Variable gelten als aufeinander folgend. Pro Basislösung mit neu einzufügender Basisvariablen trifft dies immer genau auf eine Konstellation zu. Im Beispiel ist dies die Folge (1,4)-(2,4)-(2,2)-(1,2). Diese Folge wird durchnummeriert, ausgehend von der neu einzufügenden Variablen als Nummer 0 und es werden die geraden (fett) und ungeraden Nummern (fett und unterstrichen) gekennzeichnet.

	nach			
von	Dorf 1	Dorf 2	Dorf 3	Dorf 4
Brunnen 1	0.02 200	0.06 $\underline{\mathbf{300}}$	0.03	0.02 $\boldsymbol{x_{14}}$
Brunnen 2	0.08	0.05 **200**	0.05 400	0.06 $\underline{\mathbf{100}}$
Brunnen 3	0.04	0.05	0.07	0.06 400

Von den ungeraden Nummern $x_{12} = 300$ und $x_{24} = 100$ wird das x_{ij} mit dem kleinsten Wert bestimmt, also $x_{24} = 100$, und bei allen geraden Nummern addiert und bei den ungeraden Nummern subtrahiert. Es resultiert das folgende Tableau:

von	nach			
	Dorf 1	Dorf 2	Dorf 3	Dorf 4
Brunnen 1	0.02 200	0.06 $300 - 100$	0.03	0.02 100
Brunnen 2	0.08	0.05 $200 + 100$	0.05 400	0.06 $100 - 100$
Brunnen 3	0.04	0.05	0.07	0.06 400

x_{24} ist demnach neu 0 und fällt aus der Basislösung heraus. Nehmen mehrere Basisvariablen den Wert 0 an, so wird eine beliebige ausgewählt. Die neuen Basisvariablen sind also

$$BV = \{x_{11}, x_{12}, x_{14}, x_{22}, x_{23}, x_{34}\}$$

Die Transportkosten für diese Basislösung sind:

$$C = 200 \cdot 0.02 + 200 \cdot 0.06 + 100 \cdot 0.02 + 300 \cdot 0.05 + 400 \cdot 0.05 + 400 \cdot 0.06 = 77$$

Diese Basislösung wird wiederum auf ihre Optimalität hin überprüft. Es werden die Schattenpreise der Restriktionen berechnet.

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_1 + v_1 &= 0.02 \\ u_1 + v_2 &= 0.06 \\ u_1 + v_4 &= 0.02 \\ u_2 + v_2 &= 0.05 \\ u_2 + v_3 &= 0.05 \\ u_3 + v_4 &= 0.06 \end{aligned}$$

Löst man dieses System, so erhält man für die negativen Schattenpreise:

$$\begin{array}{rcr@{\qquad\qquad}rcl} u_1 &=& 0 & v_1 &=& 0.02 \\ u_2 &=& -0.01 & v_2 &=& 0.06 \\ u_3 &=& 0.04 & v_3 &=& 0.06 \\ & & & v_4 &=& 0.02 \end{array}$$

Es werden neuerlich sämtliche Nicht-Basisvariablen dahingehend überprüft, ob die betreffenden Transportkosten kleiner sind als die Summe der entsprechenden negativen

Schattenpreise. Nur wenn dies der Fall ist, ist die Basislösung optimal.

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{13} &= u_1 + v_3 - c_{13} &= \;\; 0.03 \\
\bar{c}_{21} &= u_2 + v_1 - c_{21} &= -0.07 \\
\bar{c}_{24} &= u_2 + v_4 - c_{24} &= -0.05 \\
\bar{c}_{31} &= u_3 + v_1 - c_{31} &= \;\; 0.02 \\
\bar{c}_{32} &= u_3 + v_2 - c_{32} &= \;\; 0.05 \\
\bar{c}_{33} &= u_3 + v_3 - c_{33} &= \;\; 0.03
\end{aligned}$$

Diese Basislösung ist nicht optimal. x_{32} wird neue Basisvariable. Es wird wieder die Schleife gesucht, wie wir sie oben definiert haben und der Austausch der Variablen wird vorgenommen:

	nach			
von	Dorf 1	Dorf 2	Dorf 3	Dorf 4
Brunnen 1	0.02 200	0.06 $200 - 200$	0.03	0.02 $100 + 200$
Brunnen 2	0.08	0.05 300	0.05 400	0.06
Brunnen 3	0.04	0.05 200	0.07	0.06 $400 - 200$

x_{12} fällt aus der Basislösung. Die neuen Basisvariablen sind

$$BV = \{x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{32}, x_{34}\}$$

Die Transportkosten belaufen sich auf

$$C = 200 \cdot 0.02 + 300 \cdot 0.02 + 300 \cdot 0.05 + 400 \cdot 0.05 + 200 \cdot 0.05 + 200 \cdot 0.06 = 67$$

Erneut wird via die Schattenpreise die Optimalität der gefundenen Lösung geprüft. Für die Werte $\bar{c}_{ij}$ der Nicht-Basisvariablen erhält man:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{12} &= -0.05 \\
\bar{c}_{13} &= -0.02 \\
\bar{c}_{21} &= -0.02 \\
\bar{c}_{24} &= 0 \\
\bar{c}_{31} &= 0.02 \\
\bar{c}_{33} &= -0.02
\end{aligned}$$

Die Basislösung ist nicht optimal. Als neue Basisvariable kommt x_{31} hinzu.

von	nach			
	Dorf 1	Dorf 2	Dorf 3	Dorf 4
Brunnen 1	0.02 200-200	0.06	0.03	0.02 300+200
Brunnen 2	0.08	0.05 300	0.05 400	0.06
Brunnen 3	0.04 200	0.05 200	0.07	0.06 200-200

Da sowohl x_{11} also auch x_{34} gleich 0 sind, wird aus diesen beiden beliebig eine ausgewählt, die die Basis verlässt. Als neue Basisvariablen erhält man beispielsweise:

$$BV = \{x_{11}, x_{14}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}\}$$

Die Transportkosten belaufen sich dann auf

$$C = 500 \cdot 0.02 + 300 \cdot 0.05 + 400 \cdot 0.05 + 200 \cdot 0.04 + 200 \cdot 0.05 = 63$$

Dies stellt zugleich die optimale Lösung dar, da für diese Basislösung die $\bar{c}_{ij}$ sämtlicher Nicht-Basisvariablen ≤ 0 sind:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{12} &= -0.03 \\
\bar{c}_{13} &= 0 \\
\bar{c}_{21} &= -0.04 \\
\bar{c}_{24} &= -0.02 \\
\bar{c}_{33} &= -0.02 \\
\bar{c}_{34} &= -0.02
\end{aligned}$$

Zusammengefasst lautet die Lösung des Transportproblems wie folgt: Jeden Monat erhält das Dorf 1 200 000 Liter Wasser vom Brunnen 3. Das Dorf 2 erhält 300 000 Liter Wasser vom Brunnen 2 und 200 000 Liter vom Brunnen 3. Dem Dorf 3 werden 400 000 Liter Wasser von Brunnen 2 geliefert und Dorf 4 erhält schliesslich 500 000 Liter Wasser vom Brunnen 1. Durch diesen Transport entstehen monatliche Kosten in der Höhe von USD 63 000.

3.4 Speicherbewirtschaftung

Eine weitere Anwendung der linearen Programmierung bietet sich in der Bewirtschaftung von Speichern von Wasserkraftwerken. Die Speicher sind kaskadenförmig angeordnet: Wird in einem Kraftwerk Strom produziert, so fliesst das Wasser weiter und steht dem nachfolgenden Kraftwerk zur Verfügung. Ideal ist deshalb das Bild eines Flusses, an welchem sich in Serie mehrere Kraftwerke befinden. Entscheidungsvariablen sind in dieser Anwendung die Durchflüsse x_j durch die Turbinen der Kraftwerke j ($j = 1, 2, \ldots, n$) (vgl. Abbildung 10).

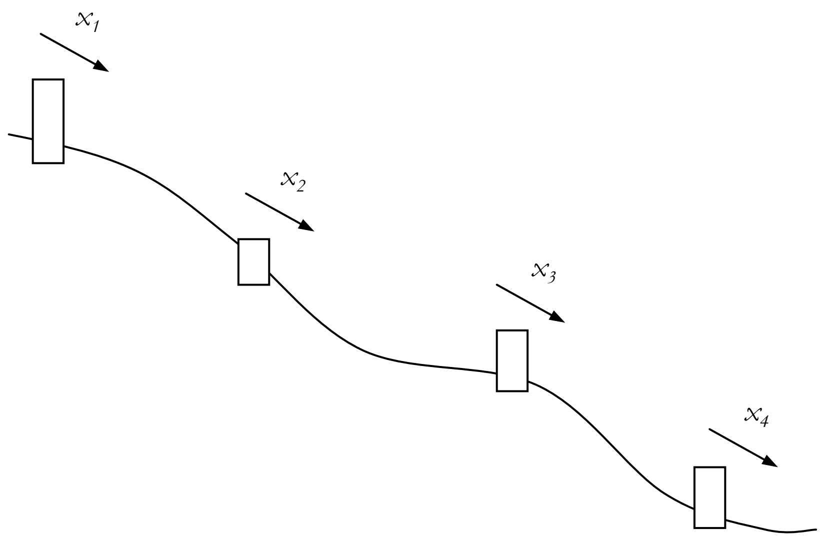

Abbildung 10

Die Zielfunktion ist die Ertragsfunktion, welche die Produkte der produzierten Strommengen und der Verkaufspreise für die einzelnen Kraftwerke summiert. Der Preis einer Einheit Strom ist dabei konstant (unabhängig von der selber produzierten Menge).

Die Zielfunktion sieht so aus:

$$\max \ z = q' \cdot x \tag{56}$$

Einfaches, einperiodiges System

Im einfachsten Fall, der im Folgenden behandelt werden soll, werden die Durchflüsse für eine Periode berechnet. Die Zielfunktion sieht dann für vier Kraftwerke $j = 1, 2, 3, 4$ beispielsweise so aus:

$$\max \ z = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 \tag{57}$$

Der Preisvektor q hat demnach folgenden Wert.

$$q = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{58}$$

Die Speicher enthalten zu Beginn bereits eine bestimmte Menge an Wasser. Diese sei durch den Vektor b bestimmt.

$$b = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{59}$$

Aus der kaskadenförmigen Anordnung der Kraftwerke und der Wassermengen in den Speichern zu Beginn folgen die Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{rcrl} x_1 & \leq & 10 & \text{(Kraftwerk 1)} \\ -x_1 + x_2 & \leq & 5 & \text{(Kraftwerk 2)} \\ -x_2 + x_3 & \leq & 7 & \text{(Kraftwerk 3)} \\ -x_3 + x_4 & \leq & 8 & \text{(Kraftwerk 4)} \\ \multicolumn{4}{l}{\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0} \end{array} \tag{60}$$

Dies bedeutet, dass im ersten Kraftwerk mit maximal 10 Einheiten Wasser Strom produziert werden kann (dies entspricht dem anfänglichen Speicherinhalt). Da die x_1 Einheiten Wasser dann zu dem nachfolgenden Kraftwerk fliessen, steht diesem zusätzlich zu dem bereits im Speicher befindlichen Wasser das Abwasser aus dem ersten Kraftwerk zur Verfügung. Es kann also im zweiten Kraftwerk mit maximal $5+x_1$ Einheiten Wasser Strom produziert werden. Beim dritten Kraftwerk wird wiederum dem ursprünglichen Speicherinhalt von 7 Wassereinheiten der Durchlauf des zweiten Kraftwerks, also x_2, hinzugefügt, um das maximal zur Verfügung stehende Wasser zu erhalten. Analoges gilt für das vierte Kraftwerk.

Am Schluss stehen die Nicht-Negativitäts-Bedingungen für die Durchflüsse x_1 bis x_4. Es sei einem Kraftwerk nicht möglich, Wasser flussaufwärts in den eigenen Speicher zu pumpen.

Das lineare Programm kann auch wie folgt dargestellt werden: Gesucht ist der Vektor x, der die Zielfunktion z maximiert unter der Bedingung, dass

$$x \in X \tag{61}$$

wobei X die Menge der Vektoren x repräsentiert, die das Restriktionensystem (60) erfüllen.

Die Lösung dieses linearen Programms ist rasch ersichtlich. Der Zielfunktionswert steigt streng monoton mit den Durchflüssen x_1 bis x_4. Wenn $x_1 = 10$ gesetzt wird, so erreicht auch x_2 den maximalen Wert und so weiter. Es ergibt sich also folgende optimale Lösung:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 10 \\
x_2 &= 15 \\
x_3 &= 22 \\
x_4 &= 30
\end{aligned}
$$

Als optimalen Zielfunktionswert erhält man $z = 283$.

Dieses Resultat überrascht wenig, ist doch einsichtig, dass der maximale Ertrag dann erzielt wird, wenn in der einen Periode der gesamte Wasservorrat zur Stromproduktion verwendet wird und die Speicher vollständig entleert werden.

Das entsprechende duale System zeigt die Auswirkungen der Relaxion einzelner Restriktionen. Hier bedeutet dies die Vergrösserung der Wassermengen in den Speichern.

$$
\begin{aligned}
\min\ w = 10\pi_1 + 5\pi_2 + 7\pi_3 + 8\pi_4 & \\
\pi_1 - \pi_2 &\geq 6 \\
\pi_2 - \pi_3 &\geq 5 \\
\pi_3 - \pi_4 &\geq 4 \\
\pi_4 &\geq 2 \\
\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 &\geq 0
\end{aligned}
\tag{62}
$$

Eine Frage könnte beispielsweise lauten: Wie verändert sich die optimale Lösung, wenn der Speicher im zweiten Kraftwerk zu Beginn 6 an Stelle von 5 Einheiten Wasser enthält. Dies selbstverständlich unter der Bedingung, dass die Basislösung unverändert bleibt. Diese Bedingung ist hier aber immer erfüllt. Es sind sämtliche Entscheidungsvariablen Basisvariablen und bleiben dies auch. Den 4 Entscheidungsvariablen stehen 4 Restriktionen gegenüber.

Wiederum steigt im System (62) der Zielfunktionswert mit jeder Erhöhung von π. Setzt man für π_4 den minimalen Wert, also 2, ein und fährt so fort, erhält man als optimale Lösung:

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= 17 \\
\pi_2 &= 11 \\
\pi_3 &= 6 \\
\pi_4 &= 2
\end{aligned}
$$

Für den minimalen Zielfunktionswert bekommt man gemäss dem Dualitäts-Theorem $z = 283$. Um auf die gestellte Frage zurückzukommen: Eine Erhöhung des gespeicherten

Wassers in Speicher 2 von 5 auf 6 Einheiten vergrössert den Zielfunktionswert um $\pi_2 = 11$ Einheiten auf $z' = 294$ Einheiten.

Zweiperiodiges, nicht stochastisches System

Das einperiodige Modell hat eine einfache Lösung, indem in der einen Periode sämtliche Speicher geleert werden. Auch die duale Lösung ist vergleichsweise einfach, da eine Erhöhung des Speicherinhalts bei einem bestimmten Kraftwerk um eine Einheit die Ertragsfunktion um die Summe der Preise einer Einheit des betreffenden und aller nachfolgenden Kraftwerke erhöht. Oben haben wir gesehen, dass eine Erhöhung des Wassers in Speicher 2 um eine Einheit die Zielfunktion um $5 + 4 + 2 = 11$ Einheiten erhöht. Solche Anwendungen erschöpfen die Möglichkeiten der linearen Programmierung bei weitem nicht.

In den folgenden Abschnitten geht es darum, das Modell auf zwei Perioden anzuwenden. Dabei kann einerseits der Preisvektor unsicher sein, andererseits kann die Wassermenge in den Speichern durch Regenfälle zunehmen.

Als erstes wird ein nicht stochastisches, zweiperiodiges Modell betrachtet. Die Variablen sind deterministisch. Für die erste Periode gelten dieselben Parameter, wie im obigen Beispiel. Der Preisvektor ist demnach[22]

$$q^1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{63}$$

Die sich in den Speichern befindliche Menge Wasser kann dem folgenden Vektor entnommen werden:

$$b^1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{64}$$

Für die zweite Periode gilt folgender Preisvektor:

$$q^2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{65}$$

[22]Zu den Indices und Superskripten: Der Index bezeichnet weiterhin die Nummer des Kraftwerks. Das Superskript bezeichnet die Periode. Im stochastischen Fall steht ein zweites Superskript für das Szenario. Es gilt also: $v_{Kraftwerk}^{Periode,Szenario}$.

Die erwartete Regenmenge beträgt ξ.

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{66}$$

Die Zielfunktion ist die Summe der Ertragsfunktionen der beiden Perioden.

$$\max\ z = (q^1)' \cdot x^1 + (q^2)' \cdot x^2 \tag{67}$$

Die Entscheidungsvariablen sind die Vektoren x^1 und x^2. Diese sind so zu wählen, dass sie die Zielfunktion maximieren. Dabei gelten die folgenden Restriktionen: Einerseits bestehen weiterhin die Restriktionen aus dem ersten Beispiel, also

$$x^1 \in X^1 \tag{68}$$

oder

$$\begin{array}{rcrl} x_1^1 & \leq & 10 & \text{(Kraftwerk 1)} \\ -x_1^1 + x_2^1 & \leq & 5 & \text{(Kraftwerk 2)} \\ -x_2^1 + x_3^1 & \leq & 7 & \text{(Kraftwerk 3)} \\ -x_3^1 + x_4^1 & \leq & 8 & \text{(Kraftwerk 4)} \\ \multicolumn{3}{c}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0} & \end{array} \tag{69}$$

Neu hinzu kommen jetzt die Bedingungen, die garantieren, dass in der zweiten Periode nicht mehr Wasser verbraucht wird, als dass in den Speichern – zuzüglich den Regenfällen – noch zur Verfügung steht.

$$x^2 \in X^2(x^1) \tag{70}$$

oder

$$\begin{array}{rcll} x_1^1 + x_1^2 & \leq & 10 + 1 & \text{(Kraftwerk 1)} \\ -x_1^1 + x_2^1 - x_1^2 + x_2^2 & \leq & 5 + 3 & \text{(Kraftwerk 2)} \\ -x_2^1 + x_3^1 - x_2^2 + x_3^2 & \leq & 7 + 2 & \text{(Kraftwerk 3)} \\ -x_3^1 + x_4^1 - x_3^2 + x_4^2 & \leq & 8 + 2 & \text{(Kraftwerk 4)} \\ x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1 & \geq & 0 & \\ x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2 & \geq & 0 & \end{array} \tag{71}$$

Auf der rechten Seite steht die Summe der Vektoren b^1 und ξ. Auf der linken Seite steht der Durchlauf in der zweiten Periode durch das entsprechende Kraftwerk. Dazugezgählt ist der Durchlauf durch das Kraftwerk in der Vorperiode. Abgezogen wird das Abwasser aus der Vorperiode und der aktuellen Periode vom vorigen Kraftwerk.

Dies ist gleichbedeutend mit einer Addition auf der rechten Seite und daher mit einer Vergrösserung des Wasservorrates.

Löst man das System, bestehend aus der Zielfunktion (67) und den Restriktionen (69) und (71), so erhält man als optimalen Zielfunktionswert $z = 441.000$. Die Durchflüsse durch die Kraftwerke betragen dabei für die einzelen Perioden:

$$\begin{array}{lll lll} x_1^1 & = & 0 & x_1^2 & = & 11.000 \\ x_2^1 & = & 5.000 & x_2^2 & = & 14.000 \\ x_3^1 & = & 0 & x_3^2 & = & 28.000 \\ x_4^1 & = & 0 & x_4^2 & = & 38.000 \end{array}$$

Zweiperiodiges System mit stochastischem Preisvektor

In einem weiteren Schritt werden aus den deterministischen Variablen nun stochastische. Weiterhin umfasst das Modell zwei Perioden. Neu ist aber für die zweite Periode der Preisvektor nicht determiniert. Die Preise können sich auf zwei verschiedene Arten entwickeln. Die beiden Möglichkeit treten mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.25 beziehungsweise 0.75 ein. Der Preisvektor für die erste Periode ist der bekannte. Für die zweite Periode können folgende Preisvektoren gültig werden:

$$q^{2,1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{72}$$

$$q^{2,2} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{73}$$

Wiederum muss $x^1 \in X^1$ gelten. Neu kommen aber für die zweite Periode zwei Bedingungen hinzu, die kumulativ erfüllt sein müssen.

$$x^{2,1} \in X^2(x^1) \tag{74}$$

$$x^{2,2} \in X^2(x^1) \tag{75}$$

Die Wassermengen in den Speichern betragen weiterhin b^1 für die erste Periode. In der zweiten kommt wiederum ξ Regen dazu. b^1 und ξ haben dieselben Werte wie im vorhergehenden Beispiel. Die Zielfunktion ist neu stochastisch. Das heisst, neben dem Produkt aus Preis und Stromproduktion geht noch die Wahrscheinlichkeit p^s $(s = 1, 2)$

für die Einschlägigkeit des Preisvektors $q^s\,(s = 1,2)$ in der zweiten Periode in die Funktion ein. Die Zielfunktion ist der Erwartungswert des Ertrags.

$$\max\ z = (q^1)' \cdot x^1 + (q^{2,1})' \cdot x^2 \cdot p^1 + (q^{2,2})' \cdot x^2 \cdot p^2 \tag{76}$$

Wie erwähnt soll hier $p^1 = 0.25$ und $p^2 = 0.75$ gelten. Das lineare Programm für zwei Perioden mit stochastischem Preisvektor für die zweite Periode sieht so aus:

$$\max\ z = (q^1)' \cdot x^1 + (q^{2,1})' \cdot x^2 \cdot 0.25 + (q^{2,2})' \cdot x^2 \cdot 0.75 \tag{77}$$

Zu den Restriktionen im System (69) kommen neu hinzu:

$$\begin{array}{rcl}
x_1^1 + x_1^{2,1} & \leq & 10+1 \\
-x_1^1 + x_2^1 - x_1^{2,1} + x_2^{2,1} & \leq & 5+3 \\
-x_2^1 + x_3^1 - x_2^{2,1} + x_3^{2,1} & \leq & 7+2 \\
-x_3^1 + x_4^1 - x_3^{2,1} + x_4^{2,1} & \leq & 8+2 \\
x_1^{1,2} + x_1^{2,2} & \leq & 10+1 \\
-x_1^1 + x_2^1 - x_1^{2,2} + x_2^{2,2} & \leq & 5+3 \\
-x_2^1 + x_3^1 - x_2^{2,2} + x_3^{2,2} & \leq & 7+2 \\
-x_3^1 + x_4^1 - x_3^{2,2} + x_4^{2,2} & \leq & 8+2 \\
x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1 & \geq & 0 \\
x_1^{2,2}, x_2^{2,2}, x_3^{2,2}, x_4^{2,2} & \geq & 0 \\
x_1^{2,1}, x_2^{2,1}, x_3^{2,1}, x_4^{2,1} & \geq & 0
\end{array} \tag{78}$$

Der optimale Zielfunktionswert, das heisst der maximale Erwartungswert, beträgt $z =$ 418.500. Die optimalen Werte für die Stromproduktion sind:

$$\begin{array}{lcllcllcl}
x_1^1 & = & 0 & x_1^{2,1} & = & 11.000 & x_1^{2,2} & = & 11.000 \\
x_2^1 & = & 0 & x_2^{2,1} & = & 19.000 & x_2^{2,2} & = & 19.000 \\
x_3^1 & = & 0 & x_3^{2,1} & = & 28.000 & x_3^{2,2} & = & 28.000 \\
x_4^1 & = & 8.000 & x_4^{2,1} & = & 30.000 & x_4^{2,2} & = & 30.000
\end{array}$$

Augenfällig ist, dass die Werte für die Durchflüsse in der zweiten Periode für beide Szenarien gleich sind. Dies rührt daher, dass für die zweite und letzte Periode die gleiche Situation herrscht, wie sie bereits für das einperiodige System besprochen wurde, nämlich, dass die optimale Lösung darin liegt, sämtliches Wasser für die Stromproduktion zu verwenden.

Bislang hatten die Speicher im Modell ein beliebig grosses Fassungsvermögen. Diese (implizite) Annahme wird nun fallen gelassen. Das Fassungsvermögen von Speicher j betrage f_j $(j = 1,2,3,4)$.

$$f = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{79}$$

Einer Spezifikation bedarf der Vektor der Regenfälle ξ. Für ihn gilt, dass der Regen nach der ersten und vor der zweiten Periode fällt. Dies bedeutet, dass der Speicher j zu Beginn der zweiten Periode das Wasser enthält, das er bereits zu Beginn der ersten Periode enthalten hatte, zuzüglich dem Abwasser aus dem Kraftwerk $(j-1)$, also x_{j-1}, und dem Regen und abzüglich dem Durchlauf durch das Kraftwerk j, also x_j. Hernach gelten zusätzlich zum Restriktionensystem (69), (78) folgende Bedingungen:

$$b_j^1 + \xi_j + x_{j-1}^1 - x_j^1 \leq f_j \; (j = 1, 2, 3, 4) \tag{80}$$

Als Zielfunktion gelte weiterhin (77).

Dieses Programm hat als optimalen Zielfunktionswert $z = 412.500$. Die Durchflüsse x für die einzelnen Perioden und Szenarien lauten:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lclcl}
x_1^1 & = & 0 & x_1^{2,1} & = & x_1^{2,2} & = & 11.000 \\
x_2^1 & = & 2.000 & x_2^{2,1} & = & x_2^{2,2} & = & 17.000 \\
x_3^1 & = & 3.000 & x_3^{2,1} & = & x_3^{2,2} & = & 25.000 \\
x_4^1 & = & 11.000 & x_4^{2,1} & = & x_4^{2,2} & = & 27.000
\end{array}$$

Für dieses Programm sollen die Dualvariablen analysiert werden. Zuerst werden die Dualvariablen der Bedingungen (80) betrachtet. Das genannte System umfasst 4 Ungleichungen. Jede dieser Ungleichungen wird im dualen, linearen Programm durch eine Variable repräsentiert. Diese haben die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 0 \\
\varphi_2 &= 2.250 \\
\varphi_3 &= 1.500 \\
\varphi_4 &= 0
\end{aligned}$$

Diese Zahlen zeigen, wie viel Wert die Erweiterung des Fassungsvermögens des Speichers j um eine Einheit für dieses Modell hat. Den Speicher 1 auszubauen bringt beispielsweise keinen zusätzlichen Ertrag, da $\varphi_1 = 0$. Dies wird sofort klar, wenn man das Fassungsvermögen des Speichers $f_1 = 11$ mit dem Speicherinhalt in Periode 1 $b_1^1 = 10$ und dem Regen für Speicher 1 von $\xi_1 = 1$ vergleicht. Da $f_1 \geq b_1^1 + \xi_1$ ist, kann eine Vergrösserung des Speichers gar keinen Einfluss auf den Ertrag haben. Hingegen verspricht $\varphi_2 = 2.250$ eine Ertragssteigerung von 2.25 Einheiten bei einem Ausbau des zweiten Speichers f_2 um eine Einheit. Wird eine zusätzliche Einheit Wasser im Speicher 2 eine Periode zurückbehalten, so entgehen in der ersten Periode – wegen den Ausfällen in den Kraftwerken 2, 3 und 4 – Erträge in der Höhe von $q_2^1 + q_3^1 + q_4^1 = 11$. Dem stehen Mehrerträge aus der zweiten Periode gegenüber. Diese betragen

$$p^1 \cdot (q_2^{2,1} + q_3^{2,1} + q_4^{2,1}) + p^2 \cdot (q_2^{2,2} + q_3^{2,2} + q_4^{2,2}) = 13.25$$

Als Differenz resultiert: $13.23 - 11 = 2.25$.

Auch dieses Resultat kann, wie alle aus der dualen Lösung gewonnen Erkenntnisse, nicht ohne weiteres für beliebige Veränderungen der betreffenden Entscheidungsvariablen gelten. So ist hier schnell klar, dass eine Erweiterung des zweiten Speichers f_2 nur so lange Sinn machen kann, als der Speicher nicht grösser wird als $b_1^1 + b_2^1 + \xi_1 + \xi_2 = 19$.

Anhand der Dualvariablen sollen nun die Auswirkungen von fehlerhaften Annahmen bezüglich der zu erwartenden Regenfälle analysiert werden. Als Ausgangslage dienen wiederum die Ungleichungen für die erste Periode (69), für die zweite, stochastische Periode (78) und für das Fassungsvermögen der Speicher (80). Die Zielfunktion sei weiterhin die Funktion (77).

Der Regenvektor ξ erhöht die gespeicherte Menge Wasser. Der Regen steht in der zweiten Periode zur Stromproduktion zur Verfügung. Allfällige Änderungen betreffen demnach ausschliesslich Restriktionen der zweiten Periode. Von Veränderungen des Vektors ξ sind die Ungleichungen des Systems (78) betroffen. Die diesen 8 Restriktionen (ohne die Nicht-Negativitäts-Bedingungen) entsprechenden Dualvariablen sind:

$$\begin{array}{lll} \beta_1^1 = 3.250 & \beta_1^2 = 17.250 & \beta_1 = 20.500 \\ \beta_2^1 = 2.000 & \beta_2^2 = 11.250 & \beta_2 = 13.250 \\ \beta_3^1 = 0.750 & \beta_3^2 = 6.750 & \beta_3 = 7.500 \\ \beta_4^1 = 0.250 & \beta_4^2 = 1.500 & \beta_4 = 1.750 \end{array}$$

In der dritten Spalte steht der Vektor β. Er ist die Summe aus β^1 und β^2. Von einer Einheit weniger Regen für den Speicher j – also einer Reduktion von ξ_j um eine Einheit – ist zu erwarten, dass sich der optimale Zielfunktionswert um β_j verringert. Die Berechnung ergibt, dass dies bloss für zwei der vier Fälle zutrifft.

$\xi_j - 1$	neuer Zielfunktionswert	
	erwartet	effektiv
$j = 1$	392.000	392.000
$j = 2$	399.250	401.500
$j = 3$	405.000	406.500
$j = 4$	410.750	410.750

Dieses Resultat klingt möglicherweise etwas ernüchternd. Die Dualanalyse ist dennoch von grossem Nutzen. Zum einen liefert sie „Kandidaten“ für Eingriffe in ein System, zum anderen bietet sich mit der Sensitivitätsanalyse ein Instrument, solche Abweichungen der effektiven Veränderung von der mit Hilfe der Dualvariablen errechneten Lösung zu berechnen.

Anhang

Hier werden die Programme wiedergegeben, wie sie verwendet wurden, um in den Anwendungen im vorhergehenden Teil die optimalen Zielfunktionswerte und die dazugehörenden optimalen primalen und dualen Variablen zu berechnen. Die Programme sind in der Sprache GAMS (General Algebraic Modeling System)[23] geschrieben und wurden mit dem Solver GAMS/Cplex 9.0.0 gerechnet.

Wurden in einer Anwendung bei einem Programm Restriktionen relaxiert, so ist dieses Programm nur einfach (in der ursprünglichen Form) aufgeführt.

Im Folgenden wird im Sinne eines kurzen Überblicks der Aufbau der nachfolgend Aufgeführten GAMS-Programme dargelegt. Zu Beginn werden unter den Titeln `Sets`, `Parameters` und `Table` verschiedene Parameter festgehalten. Anschliessend werden die `Variables` definiert. Dies sind die Entscheidungsvariablen, sowie die abhängige Variable der Zielfunktion. Mit dem Befehl `Positive Variable` werden die Nicht-Negativitäts-Bedingungen für die Entscheidungsvariablen konstituiert. Dann werden die Gleichungen definiert und in einem weiteren Schritt aufgestellt. Der Ausdruck `=g=` steht dabei für $\geq$. Schliesslich folgt in den jeweils letzten beiden Zeilen die Modellbildung und der Befehl zum Lösen des linearen Programms (`lp`).

Ölraffinierung

```
Variables
     l leichtes Rohoel
     s schweres Rohoel
     c Kosten;
Positive Variable l, s ;
Equations
     Benzin    Mindestmenge von produziertem Benzin
     Diesel    Mindestmenge von produziertem Diesel
     Heizoel   Mindestmenge von produziertem Heizoel
     Kosten    Die Zielfunktion ;
Benzin..  0.5*l+0.2*s =g=  1500000;
Diesel..  0.3*l+0.4*s =g=  1200000;
Heizoel.. 0.15*l+0.5*s =g= 1000000;
Kosten..  c =e= 22*l+18*s;
Model oel /all/;
Solve oel using lp minimizing c;
```

[23] Vgl. auch das Benutzerhandbuch von Brooke et. al. (1988), sowie die Website der „GAMS Software GmbH“ (www.gams.de) und die „GAMS Home Page“ (www.gams.com).

Kapitalbudgetierung

```
Sets j Projektnummern /1*4/
     t Perioden /1,2/;

Parameters c1(j) Aufwendungen je Projekt in Periode 1
           /1      14
            2      11
            3       8
            4      12/
           c2(j) Aufwendungen je Projekt in Periode 2
           /1       7
            2       13
            3       9
            4       6/;
Parameter NPV(j) NPV der Projekte
          /1       18
           2       17
           3       16
           4       15/;
Variables x(j) Projekte
          y totaler Output;
Positive Variable x(j);
Equations TNPV     Summe der NPV
          B1       Budget erste Periode
          B2       Budget zweite Periode
          xmax(j)  Maximaler Wert fuer x  ;

TNPV..      y =e= sum(j,x(j)*NPV(j));
B1..        sum(j,x(j)*c1(j))=l=28;
B2..        sum(j,x(j)*c2(j)) =l= 22;
xmax(j)..   x(j) =l=1;
Model Kapbdgt /all/;
Solve Kapbdgt using lp maximizing y;
```

Transport

```
Sets
     i   Brunnen   / B1, B2, B3 /
     j   Doerfer    / D1, D2, D3, D4 / ;
Parameters
a(i)  Foerdermengen der Brunnen
       /    B1   500
            B2   700
            B3   400  /
b(j)  Wassernachfrage der Doerfer
       /    D1   200
            D2   500
            D3   400
            D4   500 / ;
Table c(i,j)  Transportkosten
                  D1       D2      D3      D4
    B1            0.02     0.06    0.03    0.02
    B2            0.08     0.05    0.05    0.06
    B3            0.04     0.05    0.07    0.06   ;
Variables
     x(i,j)  Transportierte Menge
     z       Transportkosten total ;
Positive Variable x ;
Equations
     Kosten        des Transportes
     Angebot(i)    des Brunnens i
     Nachfrage(j)  des Dorfes j ;
Kosten ..        z  =e=  sum((i,j), c(i,j)*x(i,j)) ;
Angebot(i) ..    sum(j, x(i,j))  =l=  a(i) ;
Nachfrage(j) ..  sum(i, x(i,j))  =g=  b(j) ;
Model transport /all/ ;
Solve transport using lp minimizing z ;
```

Speicherbewirtschaftung

Zweiperiodiges, nicht stochastische System

```
Sets
     j   Kraftwerk   / K1, K2, K3, K4 /
Parameters
   q1(j)  Preisvektor erste Periode
      /   K1    6
          K2    5
          K3    4
          K4    2    /
  q2(j)  Preisvektor zweite Periode
      /   K1    8
          K2    4
          K3    7
          K4    2    /
  b1(j)  Wasservektor erste Periode
      /   K1    10
          K2    5
          K3    7
          K4    8    /
  b2(j)  Wasservektor zweite Periode
      /   K1    11
          K2     8
          K3     9
          K4    10   /     ;
Variables
     x1(j)   Stromproduktion in Kraftwerk j in Periode 1
     x2(j)   Stromproduktion in Kraftwerk j in Periode 2
     z       Ertrag   ;
Positive Variables x1, x2 ;
Equations
     Ertrag          entspricht der Summe der Periodengewinne
     Wasser1(j)      Speicherinhalt Kraftwerk j Periode 1
     Wasser2(j)      Speicherinhalt Kraftwerk j Periode 2   ;
Ertrag ..        z  =e=  sum((j), q1(j)*x1(j) + q2(j)*x2(j)) ;
Wasser1(j) ..    -x1(j-1) + x1(j) =l= b1(j);
Wasser2(j) ..    -x1(j-1) + x1(j) - x2(j-1) + x2(j) =l= b2(j);
Model Speicher /all/ ;
Solve Speicher using lp maximizing z ;
```

Zweiperiodiges System mit stochastischem Preisvektor

```
Sets
     j   Kraftwerk   / K1, K2, K3, K4 /
Parameters
   q1(j)  Preisvektor erste Periode
      /   K1    6
          K2    5
          K3    4
          K4    2    /
  q21(j)  Preisvektor zweite Periode Szenario 1
      /   K1    5
          K2    5
          K3    2
          K4    1    /
  q22(j)  Preisvektor zweite Periode Szenario 2
      /   K1    8
          K2    6
          K3    7
          K4    2    /
  b1(j)  Wasservektor erste Periode
      /   K1    10
          K2    5
          K3    7
          K4    8    /
  b2(j)  Wasservektor zweite Periode
      /   K1    11
          K2     8
          K3     9
          K4    10   /     ;
Variables
     x1(j)   Stromproduktion in Kraftwerk j in Periode 1
     x21(j)  Stromproduktion in Kraftwerk j in Periode 2 Szenario 1
     x22(j)  Stromproduktion in Kraftwerk j in Periode 2 Szenario 2
     z       Ertrag   ;
Positive Variables x1, x21, x22 ;
```

```
Equations
     Ertrag          entspricht der Summe der Periodengewinne
     Wasser1(j)      Speicherinhalt Kraftwerk j Periode 1
     Wasser21(j)     Speicherinhalt Kraftwerk j Periode 2 Szenario 1
     Wasser22(j)     Speicherinhalt Kraftwerk j Periode 2 Szenario 2 ;
Ertrag ..        z  =e=  sum((j), q1(j)*x1(j) + q21(j)*x21(j)*0.25
                          + q22(j)*x22(j)*0.75);
Wasser1(j) ..    -x1(j-1) + x1(j) =l= b1(j);
Wasser21(j) ..   -x1(j-1) + x1(j) - x21(j-1) + x21(j) =l= b2(j);
Wasser22(j) ..   -x1(j-1) + x1(j) - x22(j-1) + x22(j) =l= b2(j);
Model Speicher /all/ ;
Solve Speicher using lp maximizing z ;
```

Zweiperiodiges System mit stochastischem Preisvektor und Speichern mit beschränktem Fassungsvermögen

```
Sets
     j   Kraftwerk   / K1, K2, K3, K4 /
Parameters
   q1(j)  Preisvektor erste Periode
      /   K1    6
          K2    5
          K3    4
          K4    2    /
  q21(j)  Preisvektor zweite Periode Szenario 1
      /   K1    5
          K2    5
          K3    2
          K4    1    /
  q22(j)  Preisvektor zweite Periode Szenario 2
      /   K1    8
          K2    6
          K3    7
          K4    2    /
  b1(j)  Wasservektor erste Periode
      /   K1    10
          K2    5
          K3    7
          K4    8    /
  b2(j)  Wasservektor zweite Periode
      /   K1    11
          K2     8
          K3     9
          K4    10   /
  f(j)  Vektor der Fassungsvermoegen der Speicher
      /   K1    11
          K2    6
          K3    8
          K4    8    /     ;
```

```
Variables
     x1(j)   Stromproduktion in Kraftwerk j in Periode 1
     x21(j)  Stromproduktion in Kraftwerk j in Periode 2 Szenario 1
     x22(j)  Stromproduktion in Kraftwerk j in Periode 2 Szenario 2
     z       Ertrag   ;
Positive Variables x1, x21, x22 ;
Equations
     Ertrag          entspricht der Summe der Periodengewinne
     Wasser1(j)      Speicherinhalt Kraftwerk j Periode 1
     Wasser21(j)     Speicherinhalt Kraftwerk j Periode 2 Szenario 1
     Wasser22(j)     Speicherinhalt Kraftwerk j Periode 2 Szenario 2
     Volumen(j)      Volumen des Speichers j     ;
Ertrag ..        z  =e=  sum((j), q1(j)*x1(j) + q21(j)*x21(j)*0.25
                          + q22(j)*x22(j)*0.75) ;
Wasser1(j) ..    -x1(j-1) + x1(j) =l= b1(j);
Wasser21(j) ..   -x1(j-1) + x1(j) - x21(j-1) + x21(j) =l= b2(j);
Wasser22(j) ..   -x1(j-1) + x1(j) - x22(j-1) + x22(j) =l= b2(j);
Volumen(j) ..    b2(j) + x1(j-1) - x1(j) =l= f(j);
Model Speicher /all/ ;
Solve Speicher using lp maximizing z ;
```

Literaturverzeichnis

Brooke, A.; Kendrick, D.; Meeraus, A.; Raman, R.; Rosenthal, R. E. (1988). *GAMS: A User's Guide.* Redwood City: Scientific Press.

Dantzig, G. B. (1963). *Linear Programming and Extensions.* Princeton: Princeton University Press.

Ohse, D. (1998). *Quantitative Methoden in der Betriebswirtschaftslehre.* München: Vahlen.

Winston, W. (1994). *Operations Research: Applications and Algorithms* (3^{rd} edition). Belmont: Duxbury Press.

Online-Quellen

GAMS Home Page. Gefunden am 18.11.03 unter *www.gams.com*.

GAMS Software GmbH. Gefunden am 18.11.03 unter *www.gams.de*.

Ich erkläre hiermit,

- dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Verwendung anderer als der angegebenen Hilfsmittel verfasst habe,
- dass ich ohne schriftliche Zustimmung des Rektors keine Kopie dieser Arbeit an Dritte aushändigen werde, ausgenommen nach Abschluss des Verfahrens an Studienkollegen und -kolleginnen oder an Personen, die mir wesentliche Informationen für die Bachelor-Arbeit zur Verfügung gestellt haben.

Simon Wehrmüller